INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL EM UMA ÚNICA VARIÁVEL: Uma visão generalizada e informal

João Gabriel L. N. M. Bento

May 31, 2016

1 "Senhoras e senhores, eu lhes apresento o Cálculo!"

Há vários motivos para pensarem em impôr o Cálculo Diferencial e Integral (que, possivelmente, ao longo desta seção será utilizado somente o termo "Cálculo") como uma matéria desnecessária às aulas no ensino médio brasileiro, mas já vos aviso que a escolarização e, consequentemente, o ensino brasileiro é falho. Qualquer matriz curricular de quaisquer cursos no ensino superior de Ciências Exatas apresenta o Cálculo como uma disciplina fundamental, sendo lecionada logo no início do curso. Sinceramente, não vejo motivo para não ensiná-la o quanto antes nas escolas, aproveitando o que talvez seja o "período mais fértil" da formação de futuros pensadores.

Pesquisadores e educadores afirmam: "O alto índice de reprovação verificado nessas disciplinas (...), colocam o Cálculo Diferencial e Integral no centro de discussões e pesquisas acadêmicas.". Esse pensamento é coerente com a realidade, mas ainda acredito que há como revertê-lo. Creio que apresentar inicialmente a disciplina de maneira informal, provocando uma interpretação mais sincera do conteúdo, sempre tendo como base a intuição e tentar deixar o formalismo padronizado um pouco de lado, ajudará o estudante no seguimento do assunto.

Mas, enfim, o que seria o cálculo? Poderíamos dizer, de forma bastante vaga, que é uma análise mais profunda das funções, verificando as ferramentas mais necessárias para chegarmos a uma conclusão do paradigma imposto. De maneira mais concreta: as ferramentas são meramente operações matemáticas (limites, derivadas e integrais). Operções que funcionam como a adição, a multiplicação, mas que se distiguem por serem aplicadas no campo funcional. O paradigma seria a interpretação do comportamento de funções em diversos termos (quão rapidamente uma função cresce ou decresce em relação a outra, por exemplo)

Sendo feita esta simples introdução, eu lhes apresento o Cálculo! Espero que aproveitem. Peço que já dominem noções básicas sobre conjuntos e funções, pois poderá ser necessário.

2 Definição Informal de um Limite

Caso não seja, imagine-se como um leigo no assunto. Depois de uma introdução impecavelmente incompreensível, provavelmente, você se depararia com a seguinte equação:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

(eq. 2.0)

Sim, eu sei que ela assusta, mas, ao mesmo tempo que ela aparenta ser abominável, possui um significado sublime: a tendência da função. Eu sei que dizer somente isso não o fará entender muita coisa, então vamos nos aprofundar aos detalhes. De início, devemos ler o símbolo $x \to x_o$ como "quando a variável da função tende ao valor x_o". Ele funciona como um "*zoom* infinito", isto é, numa escala inicial (arbitrária, o que me permite escolher distâncias quaisquer), a distância entre x e x_o é 1, mas, alterando-se a escala através do *zoom*, essa distância fica cada vez menor até que, ao ser repetido esse processo infinitas vezes, a distância tende a ser tão ínfima que o valor x seria absolutamente confundido por x_o na escala inicial, apesar de $x \neq x_o$.

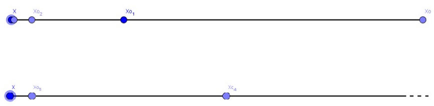

Figure 1: Perceba que, ao repetir o processo apenas cinco vezes, o ponto $x_{0,5}$ facilmente se confunde com o ponto x na escala original. Atenção ao detalhe que está sendo feito $x_o \to x$ e não $x \to x_o$.

A função f tem como variável x e, por isso, a escrevemos de forma mais restrita: $f(x)$. Sendo assim, dado um domínio A (que poderia ser o conjuntos dos números reais, por exemplo), temos que x pode varrer todo e qualquer valor do conjunto A, ao mesmo tempo que f varre um outro conjunto B para cada x escolhido em A; e, devido a essa relação, é dado ao conjunto B a denominação "contradomínio".

Para entender mais intuitivamente o conceito de função e de tendência da função, vamos imaginar a simples equação matemática $ax + b = 0$. Sabemos que ela é verdadeira, se, e somente se, $x = \frac{-b}{a}$. Agora imagine que $ax + b$ possa assumir valores diferentes de zero, ou melhor, não necessariamente iguais a zero. Digamos que a equação assume agora um valor qualquer k . Se a e b são invariantes perante x, isto é, não variam dados valores diferentes de x, temos que k pode assumir valores diferentes para distintos números x adotados na equação. Podemos dizer então que $f(x) = k = ax + b$. Embora assim fora criada uma função do primeiro grau, esse pensamento pode ser utilizado para qualquer que seja a equação, então não precisamos ter medo ao interpretá-la dessa forma.

O símbolo " $\lim f(x)$" significa o limite da função $f(x)$, isto é, o valor que a função $f(x)$ tende a atingir. Isso pode parecer muito vago, mas perceba que ao analisar essa definição para $x \to x_o$, ela passa a ser mais coerente. Finalmente, lendo a eq. 2.0 como deveríamos, temos: "quando x tende ao valor x_o, a função

$f(x)$ tende ao valor L". Viu? Agora parece ser bem simples, não é? Bem... Pelo menos um pouco mais simples.

Aparentemente, parece que $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$, mas este é um erro crucial que muitos cometem, pois ela só ocorre com algumas funções. Embora pareça fazer sentido sempre, essa afirmação é declarada falsa, pois a tendência de uma função pode chegar a um ponto que sequer pertença à ela, o que seria impossível de ocorrer a igualdade anterior. Como essa parte exige um raciocínio mais apurado, iremos explaná-la através de exemplos.

Exemplo 1.0 *Avalie o limite quando $x \to 2$ nas seguintes funções:*

1. $f(x) = x^2$;
2. $f(x) = x^2$, se $x \neq 2$, e $f(x) = 3$, se $x = 2$;
3. $f(x) = x^2$, se $x < 2$, e $f(x) = 3$, se $x \geq 2$.

O **Exemplo 1.0** poderá ser respondido após as próximas definições.

2.1 Limites Laterais

O limite lateral de uma função é a tendência do valor desta aplicada à tendência do valor de sua variável pela lateralidade a um certo ponto. Se $x \to x_o^-$, dizemos que x tende a x_o através de valores à esquerda deste (considerando o eixo das abscissas no plano cartesiano); se $x \to x_o^+$, dizemos que x tende a x_o pela direita. Se o limite da função $f(x)$ tende a um valor M quando x tende a x_o pela esquerda, escrevemos:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = M.$$

(eq. 2.10)

Caso o limite da função tenda a um valor N quando x tende a x_o pela direita, escrevemos:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = N.$$

(eq. 2.11)

Como relacionamos o limite "geral" com os limites laterais? Isso será abordado no próximo tópico, junto com a resolução dos exemplos.

2.2 Condição de Existência de um Limite

Obviamente, só faz sentido analisar um "limite geral" quando os limites laterais pela esquerda e pela direita se coincidem a um único valor. De fato, essa é a condição de existência do limite da função:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Caso ocorra o contrário, ou seja, os limites laterais serem diferentes, dizemos que o limite da função não existe. Nesse caso, os valores da eq. 2.10 e da eq. 2.11 são distintos, isto é:

$$M \neq N.$$

Portanto, dada a condição acima, o limite $\lim_{x \to x_o} f(x)$ não existiria.

Teorema: *Dado o valor de tendência da variável, o limite de uma função existe, se, e somente se, seus limites laterais convergirem ao mesmo valor.*

Com essas definições, podemos responder aos itens do **Exemplo 1.0**.

- **Solução**:

1. Determine $\lim_{x \to 2} f(x)$, se $f(x) = x^2$.

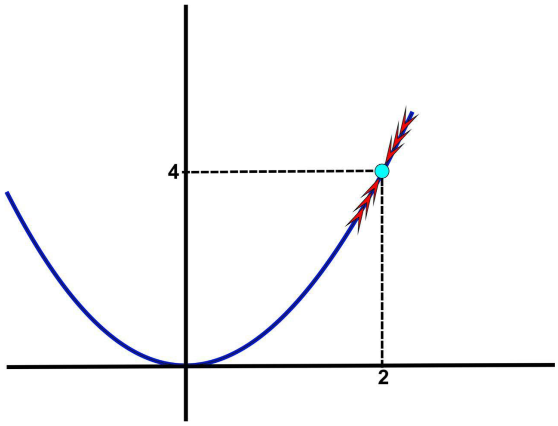

Figure 2: Gráfico da função $f(x) = x^2$, explicitando-se a tendência dos limites laterais para $x \to 2$.

Pelo gráfico, percebe-se o limite lateral pela esquerda:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4.$$

E o limite lateral pela direita:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.$$

Como ambos convergem a um mesmo valor, então:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

2. Determine $\lim_{x \to 2} f(x)$, se $f(x) = x^2$, para $x \neq 2$, e $f(x) = 3$, para $x = 2$.

   Pelo gráfico, percebe-se a tendência da função para valores de x próximos, porém menores, a 2 é:

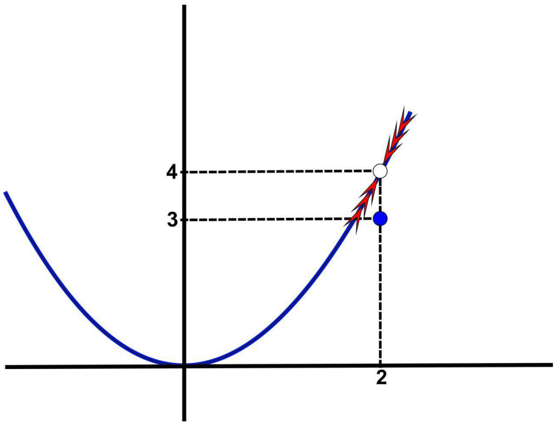

Figure 3: Gráfico da função $f(x)$, explicitando-se a tendência dos limites laterais para $x \to 2^-$ e para $x \to 2^+$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4.$$

E a mesma análise para valores de x próximos, porém maiores, a 2 é:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.$$

Apesar de $f(2) = 3$, a tendência da função se comporta de maneira diferente, portanto ambos os limites laterais convergem a um mesmo valor e então:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

3. Determine $\lim_{x \to 2} f(x)$, se $f(x) = x^2$, para $x < 2$, e $f(x) = 3$, para $x \geq 2$.

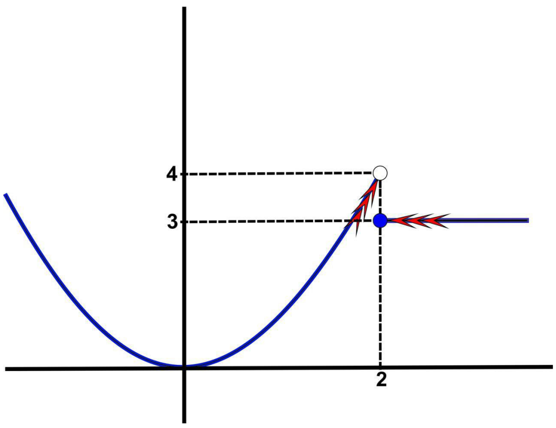

Figure 4: Gráfico da função $f(x)$, explicitando-se a tendência dos limites laterais para $x \to 2^-$ e para $x \to 2^+$.

Pelo gráfico, percebe-se a tendência da função para valores de x próximos, porém menores, a 2 é:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4.$$

E a mesma análise para valores de x próximos, porém maiores, a 2 é:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3.$$

Como os limites laterais não se coincidem, então não existe limite de $f(x)$ para $x \to 2$.

2.3 Propriedades dos Limites

Nesta subseção, veremos como realizar operações matemática com limites, que podem muitas vezes facilitar seus cálculos. Essas propriedades não serão demonstradas, pois são bastante intuitivas e seria uma complicação tentar entendê-las com uma matemática bastante formal.

i) **Limite de uma função constante**:

O que consideramos aqui como uma constante é um elemento invariante, que não depende da variável ou meramente um número, a. Obviamente, se uma função é constante, ela assume o mesmo valor independentemente da variável. De forma geral, o limite de uma constante é a própria:

$$\lim_{x \to x_o} a = a.$$

(eq. 2.20)

ii) **Limite de uma soma ou subtração de funções**:

De forma intuitiva, o limite da soma entre duas funções (f e g) pode ser escrito como a soma dos limites individuais, ou seja:

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x).$$

(eq. 2.21)

iii) **Limite de um produto ou de um quociente entre funções**:

Simplesmente, o limite de um produto ou de um quociente entre duas funções pode ser escrito como o produto ou o quociente dos limites individuais, ou seja:

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to x_o} f(x) \times \lim_{x \to x_o} g(x).$$

(eq. 2.22)

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_o} f(x)}{\lim_{x \to x_o} g(x)}.$$

(eq. 2.23)

iv) **Limite de um logaritmo ou de uma exponenciação**:

Espero que você não tenha pulado esta subseção, porque agora mostraremos a relação exponencial e logaritmica entre funções de uma maneira não tão difundida. Geralmente, é vista apenas a relação entre uma função e uma constante em ambos os casos.

Basicamente, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções que estão de acordo com a mesma variável e se relacionam na forma exponencial, podemos escrever:

$$\lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \to x_o} f(x)]^{\lim_{x \to x_o} g(x)}. \tag{eq. 2.24}$$

Essa equação explica a relação com a constante:

$$\lim_{x \to x_o} [f(x)]^{a} = [\lim_{x \to x_o} f(x)]^{a}.$$

Mas que também poderia ocorrer na forma:

$$\lim_{x \to x_o} (a)^{f(x)} = (a)^{[\lim_{x \to x_o} f(x)]}.$$

Da mesma forma, se $f(x)$ e $g(x)$ se relacionam logaritmicamente, podemos escrever:

$$\lim_{x \to x_o} \log_{g(x)}[f(x)] = \log_{\lim_{x \to x_o} g(x)} [\lim_{x \to x_o} f(x)]. \tag{eq. 2.25}$$

Obtendo as mesmas relações com constantes no lugar de funções.

2.4 Ao Infinito e Além das Indeterminações!

Este é o tópico que traz mais dores de cabeça e desacordos. É onde a matemática goza de ser abstrata e exata ao mesmo tempo. Com tanta confusão assim, por onde começaríamos, então?

Por que não começarmos deduzindo intuitivamente o que é "finito"? Uma definição poderia ser "aquilo que acaba", mas, na matemática, o sentido de "acabar" é inviável para uma definição tão formal, pois o infinito matemático não precisa necessariamente ser algo eterno, perpétuo. Então precisamos de uma definição mais completa.

Em 1834, o matemático Dirichlet propôs o *princípio do engavetamento* (do alemão "Schubfachprinzip"), que mais tarde viria se tornar o *princípio das casas de pombos*, teorema importante e muito utilizado na Teoria dos Números e na Combinatória. O princípio da casa dos pombos é a afirmação de que, se n pombos devem ser postos em m casas, e, se $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo. Isso, indiretamente, passa a ser uma formulação de bijeção, que é uma importante concepção para o entendimento do infinito. Mais tarde, Richard Dedekind cria uma proposta equivalente à de Peano sobre a formulação do infinto: um conjunto é infinito se existe uma função de um para um (bijeção) entre todo o conjunto e um subconjunto próprio.

Um conjunto A é necessariamente diferente de um conjunto B, mas de modo B esteja contido no primeiro, se eles possuem a mesma cardinalidade, então ambos são infinitos. Exemplos comuns são os conjuntos numéricos.

Define-se, então, que o infinito matemático não é um número, mas algo incomensurável. Quando tomamos uma das coordenadas cartesianas, temos dois infinitos: um positivo e um negativo. Por isso, o infinito não é somente algum número imenso, tão grande quanto queira ou maior, porque o infinito negativo contraria isso. Um reflexo disso é a consideração:

$$\lim_{x \to +\infty} (x + a) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x + a) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Em outras palavras, para qualquer que seja a constante a (positiva ou negativa) somada a x, quando este tende ao infinito, a adição de a é desprezível. Isso também explica os limites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a}{x} = 0.$$

Ou de um modo, geral:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0.$$

A razão $\frac{a}{x}$ quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ é, de fato, nula, devido à falta de compatibilidade de comparação entre a e o infinito.

Nota: *Não confunda as relações anteriores com a condição de existência de um limite, pois não estamos relacionando limites laterais de uma função. Inicialmente, fizemos $x \to +\infty$, o que indica um valor "muito positivo" de x; após isso, fizemos $x \to -\infty$, o que indica um valor "muito negativo" de x, que seria o outro "extremo" da reta dos reais. A conclusão que chegamos é que, como a é "nada" comparado a infinitos negativo e positivo, então não faz diferença o uso do sinal nesse caso, pois é nulo.*

2.5 Teorema do Confronto e Limite Fundamental da Trigonometria

O *Teorema do Confronto* ou *Teorema Sanduíche* atua de forma bastante intuitiva e faz jus ao nome. Ele afirma que as funções de mesma variável que obedecem a desigualdade $g(x) < f(x) < h(x)$e são construídas de tal modo que $\lim_{x \to x_o} g(x) = \lim_{x \to x_o} h(x) = L$, então tem-se:

$$L < \lim_{x \to x_o} f(x) < L.$$

Implicando em:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Uma consequência crucial é um limite trigonométrico bastante importante e que resulta em uma bela expressão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

(eq. 2.30)

Por ser um resultado tão magnífico, a prova dele será usada como aplicação do Teorema do Confronto.

- **Provando a** eq. 2.30:

Primeiro consideremos que o domínio da função $f(x) = sen(x)$ é $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, como ela é realmente definida. Se S_x é a área do setor circular definido pelo ângulo x, $[XYZ]$ é a área do triângulo de vértices X, Y e Z e situando-se pela *figura* 1, temos, para $x \neq 0$:

$$[BOC] < S_x < [AOB].$$

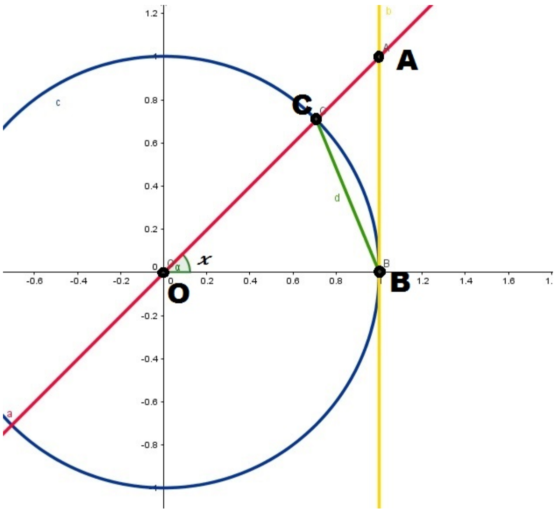

Figure 5: Relações no círculo trigonométrico.

$$\frac{1 \times sen(x)}{2} < \frac{x \times 1^2}{2} < \frac{1 \times tg(x)}{2}.$$

Como as áreas são valores positivos, então vamos impôr o uso do valor absoluto dos termos:

$$|sen(x)| < |x| < \frac{|sen(x)|}{|cos(x)|}.$$

Dividindo todos os membros por $|sen(x)|$, obtemos:

$$1 < \frac{|x|}{|sen(x)|} < \frac{1}{|cos(x)|}.$$

Podemos, então, retirar o módulo do cosseno, pois adotamos um intervalo em que $cos(x) > 0$. Como $sen(x)$ possui sempre o mesmo sinal que x neste intervalo, então o valor absoluto do quociente passa ser o mesmo, restando:

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Ao invertermos os termos, invertemos a desigualdade:

$$1 > \frac{sen(x)}{x} > cos(x).$$

Aplicando o limite quando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} 1 > \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} > \lim_{x\to 0} cos(x)$$

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} > 1.$$

Finalmente, teremos que aplicar o *Teorema do Confronto*, resultando em:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Você pode estar não entendendo, então simplificarei. Vamos aplicar a propriedade da eq. 2.23, obtendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}[sen(x)]}{\lim_{x\to 0}[x]} = 1.$$

Não reconhece? Então vamos aproveitar que esse resultado implica em:

$$\lim_{x\to 0} sen(x) = \lim_{x\to 0} x.$$

Ainda não está reconhecendo? Será possível que eu tenho que fazer tudo por aqui? Tudo bem! Eu vou ajudá-lo. Algum dia um professor de física seu já deve ter usado uma aproximação nas aulas de oscilações ou óptica geométrica que aparenta ser um pouco exagerada: *"para ângulos pequenos, o seno é aproximadamente igual ao próprio ângulo em radianos"*. O resultado acima é exatamente uma das provas dessa afirmação! Ele pode até ter falado que ambos também são aproximadamente iguais à tangente do ângulo, mas isso é consequência de $\lim_{x\to 0} cos(x) = 1$. Não é incrível? (...) Bem... Eu acho incrível.

2.6 Limite Fundamental da Exponenciação

O número de Euler, e, é uma das mais importantes constantes da matemática e o porquê disso será compreendido na seção sobre diferenciação. O *Limite Fundamental da Exponenciação* dimensiona o entendimento sobre essa constante de forma funcional, interagindo com áreas ligadas à matemática financeira e economia, por exemplo. Ele é formulado como sendo:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(eq. 2.40)

Com certeza, é uma bela expressão. De início, pode causar estranhamento, pois aparenta resultar $e = 1$ (quando substituímos n por ∞, mas, na verdade, $e = 2,71828...$), porém não se deve ser precipitado no cálculo de limites. Em seguida, também causa confusão o fato de ser muito usada na matemática financeira e, por isso, tentaremos deduzí-la através de um *gedanke*, isto é, uma "experiência imaginária".

- ***Gedanke***:

Em Bentópolis, a moeda utilizada é o "Bentum" (que, baseada no latim, tem como plural "Benta"), ou seja, a unidade no Brasil que corresponde ao Real, lá corresponde ao Bentum, mas sendo este muito mais valorizado que aquele.

Certo dia, o jovem rapaz Leonhard Euler da Silva se dirigiu ao Banco Diferencial e Integral de Bentópolis e, preocupado com suas economias, decidiu pegar emprestado B\$100,00 (cem benta) com a finalidade de quitar essa quantia ao se passar o período de um ano. O banco funciona de acordo com os juros compostos e de modo que as somas dos juros parciais em um empréstimo é sempre igual a 100%. Sendo assim, foram dadas ao rapaz diversas ofertas:

i) Considerando o ano como uma parte única, o cliente deve pagar o valor do empréstimo acrescido de juros correspondentes a 100%, resultando no pagamento de B\$200,00 (duzentos benta).

ii) Dividindo-se o ano em duas partes iguais, o cliente tem o direito de, ao se passar metade de um ano, pagar uma quantia correspondente ao valor do empréstimo acrescido de 50% de juros, resultando em B\$150,00 (cento e cinquenta benta); ou o cliente pode optar por esperar o decorrer de mais seis meses, acrescentando-se 50% de juros ao valor anterior, resultando em B\$225,00.

iii) Dividindo-se o ano em três partes iguais, o cliente pode optar por pagar o empréstimo ao decorrer dos primeiros quatro meses acrescidos de 33,333...%, resultando em B\$133,333...; caso não pague, ao decorrer de mais quatro meses, o cliente pagaria o valor anterior acrescido de 33,333...%, resultando em B\$177,777...; ou ainda, no decorrer dos quatro meses finais, pagaria o valor anterior acrescido de mais 33,333...%, resultando em B\$ 237,037... .

Seguindo as lógicas anteriores, ao dividir o ano em n partes, o jovem rapaz deveria pagar um montante, M, correspondente a:

$$M = 100 \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Leonhard Euler da Silva logo percebeu que, se quisesse pagar quando pudesse, ou seja, ao se dividir o ano em infinitas partes, o seu montante ao final do ano teria um valor aproximado de B$271,83.

Como ele descobriu esse valor? Na verdade, ele usou o dinheiro do empréstimo para comprar uma calculadora muito potente e a usou substituindo na expressão anterior o n por números bastante grandes (teste na sua calculadora com $n =$ 1.000.000, por exemplo), obtendo um valor aproximado de e então multiplicando-o por 100.

Não foi uma atitude muito sensata usar o dinheiro de um empréstimo para comprar uma calculadora que calculasse o valor do empréstimo ao final do ano, mas Leonhard Euler da Silva conseguiu deduzir a eq. 2.40. Bem... Mas não façam o mesmo que ele.

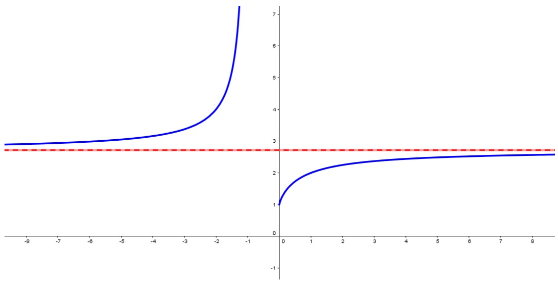

Figure 6: Gráfico da função $y = f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, que possui como assíntota $y = e$.

2.7 Limite e Continuidade

Quando o conteúdo de *Limites* iniciou-se, foi alertado o rompimento da igualdade $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Ela pode até ocorrer (e veremos que essa será a condição de continuadade de uma função), mas não é necessariamente satisfeita.

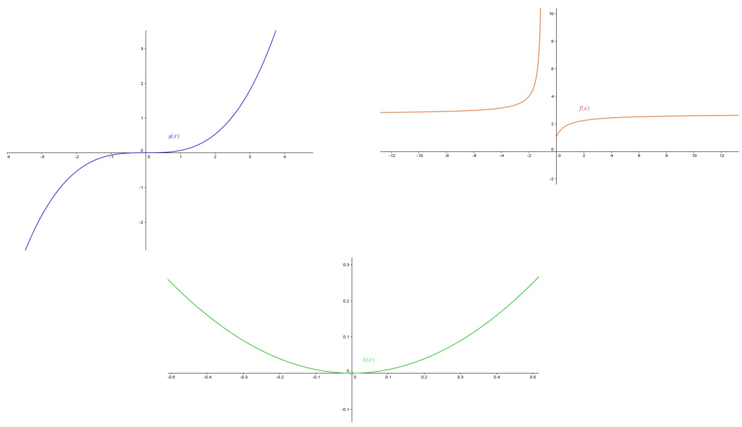

Figure 7: Três funções-exemplo: $f(x)$ em vermelho; $g(x)$ em azul; e $h(x)$ em verde.

Percebamos que, das três funções acima, duas são interrompidas em determinados pontos (a origem não pertence à função $h(x)$, caso não seja perceptível), mas que poderiam ser até um intervalo completo. Quando temos esta espécie de interrupção, dizemos que se trata de uma função **descontínua**.

A continuidade de uma função é a propriedade desta que a faz caminhar em sua trajetória normal (a curva que sua lei representa) com a ausência de obstáculos que a interrompam (geralmente, surgem por condições de existência da função). A continuidade ocorre quando:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

(eq. 2.50)

Se $f(x_o)$ existe e a *eq. 2.50* ocorre, então a função é contínua naquele ponto. Obviamente, para determinar a continuidade de uma função em $x = x_o$, devemos calcular os limites laterais de quando $x \to x_o$ e verificarmos se convergem ao valor $f(x_o)$, corroborando com a *eq. 2.50*. Lembre-se: se $x \to {x_o}^-$, então $x < x_o$; se $x \to {x_o}^+$, então $x > x_o$.

Nota: *Estendendo para uma compreenção da continuidade de uma função sobre um determinado intervalo, então, além de verificarmos a condição de continuidade de cada elemento pertencente ao intervalo, ainda devemos verificar se os limites laterais internos ao intervalo dos elementos das extremidades convergem para o valor da função nestes pontos.*

2.8 Regra de L'Hospital

A regra de L'Hospital para o cálculo de limites inicialmente indeterminados requer o conhecimento de derivadas, então esta seção pode ser pulada sem problema algum, portanto que você volte depois de obter tal noção. Ela se define para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\pm\frac{\infty}{\infty}$. Quando nos deparamos com um limite do tipo $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$, ou ocorrendo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = 0.$$

Ou ainda:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \pm \lim_{x \to x_o} g(x) = \pm\infty.$$

A regra afirma que, se $f^{[n]}(x)$ é a enésima derivada de $f(x)$, temos:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f^{[n]}(x)}{g^{[n]}(x)}.$$

(eq. 2.60)

Para mostrar a validez do enunciado, utilizaremos um exemplo já conhecido.

- **Provando a** *eq. 2.30* **pela Regra de L'Hospital**:

Da aplicação direta da regra, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d[sen(x)]}{dx}}{\frac{d(x)}{dx}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} cos(x)$$

Finalmente, resultando em:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

3 Derivação ou Diferenciação

Através de Newton, a derivada nasceu por meio de raciocínios físicos, mais precisamente, cinemáticos. De fato, ainda hoje a forma como ele desenvolveu a diferenciação é tratada como um dos métodos mais didáticos para o ensino desse assunto. O método em questão é a análise do movimento de um corpúsculo.

Se uma partícula realiza movimento unidimensional, sabendo-se as posições que ela ocupa ao decorrer do tempo, podemos criar uma função relacionando ambos os parâmetros (posição e tempo). Essa função poderia ter sido criada de qualquer forma, bastando ter uma relação entre esses dois parâmetros. A maneira mais interessante de se trabalhar foi a função criada a partir do quociente entre a variação da posição e uma variação de tempo, a qual fora chamada de *velocidade*.

Obviamente, não são variações quaisquer de posição e tempo relacionadas. Se, na *situação I*, a partícula se encontra na posição x_1 no tempo t_1e, na *situação II*, ela se encontra na posição x_2 no tempo t_2, a velocidade escalar média entre as situações I e II, $v_{e,m}$, é dada por:

$$v_{e,m} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

No gráfico *posição* $\times$ *tempo*, temos a função da posição (x) na variável tempo (t), $x(t)$. Nela, a *situação I* corresponde ao ponto $P_1(t_1, x_1)$ e a *situação II* corresponde ao ponto $P_2(t_2, x_2)$, ambos pertencentes à função.

Essa forma de razão entre variações da função e da variável é chamada de taxa de variação da função em relação à variável e sua importância é percebida pela comparação entre a taxa de variação e o ângulo da reta secante que passa pelos dois pontos escolhidos na função, ou seja, $v_{e,m}$ é numericamente igual à tangente do ângulo que a reta secante à função $x(t)$, passando pelos ponto P_1 e P_2, faz com a direção do eixo das abscissas (que corresponde ao eixo temporal).

Nota: *É dito "numericamente igual", pois uma tangente não tem dimensões de velocidade (comprimento por tempo, como "metro por segundo"), portanto o valor da tangente do ângulo que a reta secante faz com o eixo temporal coincide somente com o valor numérico da velocidade.*

Os primórdios da derivada de uma função surge com a dúvida: como obter o valor da velocidade de uma partícula em um único ponto, ou seja, sua velocidade instantânea? Como poderíamos, então, ajustar uma reta secante para que ela passasse a ser uma tangente? Essa dúvida foi finalmente solucionada por Isaac Newton no século $XVII$ quando ele utilizou uma noção intuitiva de limites para aproximar um dos pontos por qual a reta secante passa e aproximá-lo do outro ponto de mesma característica.

Considere a ilustração a seguir (*Figure 2*), em que a reta secante (vermelha) intercepta uma função $f(x)$ (curva azul) em dois pontos: o primeiro de abscissa x e o segundo de abscissa $x + \Delta x$, o que nos permite afirmar que as abscissas se distanciam de Δx. Obviamente, se Δx diminui, cada vez mais o segundo ponto se aproxima do primeiro. Se α é o ângulo que a secante faz com o eixo das abscissas, temos:

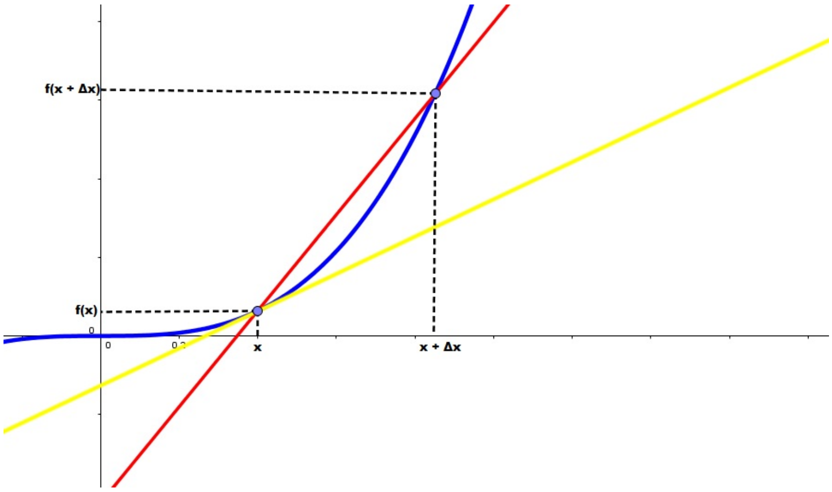

Figure 8: Reta secante e reta tangente a uma função em um x qualquer.

$$tg(\alpha) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - (x)} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Se, para aproximarmos ambos os pontos com a finalidade de fazer a reta passar por um único ponto, ou seja, fazer da reta secante uma reta tangente (amarela), precisamos diminuir a distância entre eles. Compreende-se que a inclinação da reta tangente será obtida ao se fazer $\Delta x \to 0$ na expressão anterior. Se α' é o ângulo que a reta tangente à função faz com eixo das abscissas, temos:

$$tg(\alpha') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(eq. 3.0)

Essa expressão é exatamente a definição e o significado de derivada ou diferenciação. Trocando apenas algumas denotações, como $tg(\alpha') = f'(x)$ e $\Delta x = h$, escrevemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

(eq. 3.01)

Utilizaremos mais a denotação da *eq. 3.01* do que a da *eq. 3.0*, apesar desta também ser importante para alguns entendimentos, como a denotação de Leibniz para a derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d\,(f(x))}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{d(f(x))}{dx}.$$

(eq. 3.02)

A denotação de Leibniz para a diferenciação é muito importante para as ciências pela facilidade que nos dá de realizar diversas operações. Ela abrange que, para $\Delta x \to 0$, ainda existe uma diferença infinitesimal entre valores no eixo das abscissas, dx, corroborando na existência de uma diferença também infinitesimal da função correspondente, $d(f(x))$, mesmo que sejam tão pequenas que poderiam ser facilmente confundidas com o "nada".

A partir dessas deduções, temos a definição de derivada dada pelas equações anteriores e o seu signifcado geométrico, que é a inclinação da reta tangente ao gráfico.

Exemplo 2.0 *Avalie a derivada da função* $f(x) = x^2$.

- **Resolução**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$f'(x) = 2x.$$

Ao diferenciarmos $f(x) = x^2$, obtemos $f'(x) = 2x$, que continua sendo uma função na variável x, porém do primeiro grau. Esse resultado aparenta fazer sentido, pois esperamos obter uma reta tangente, então o reultado dessa derivação ser uma função do primeiro grau, cuja representação gráfica é uma reta condiz com a intuição. Certo?

Na verdade, o pensamento anterior é errado. O detalhe é que $f'(x) = 2x$ **não é a equação da reta tangente**, mas representa a sua **inclinação**, ou seja, a tangente do ângulo que essa reta faz com o eixo das abscissas. O fato da derivada de $f(x)$ continuar sendo dependente de x demonstra que, dependendo do ponto que escolhemos na parábola, a inclinação da reta tangente a esse ponto pode variar, dependendo da posição deste, como é analisado na figura da próxima página.

Para consolidar essa afirmação, bastaríamos encontrar uma derivada que ou não fosse dependente da variável ou fosse dependente, mas estando ela a um grau distinto de um, como as que serão sugeridas no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1 *Avalie as derivadas das funções:*

1. $f(x) = 3x + 4$;
2. $f(x) = 5x^3 + 7x$;
3. $f(x) = 6$.

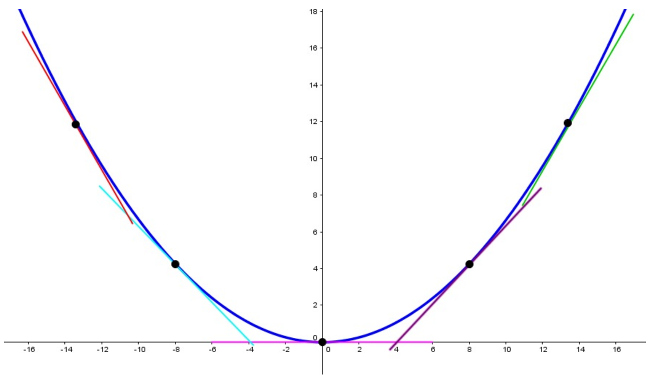

Figure 9: Diferentes retas tangentes definidas para diferentes valores de x.

- **Resoluções**:

1. $f(x) = 3x + 4$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)+4] - [3x+4]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h + 4 - 3x - 4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3$$

$$f'(x) = 3.$$

2. $f(x) = 5x^3 + 7x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[5(x+h)^3 + 7(x+h)] - [5x^3 + 7x]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[5(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 7x + 7h] - [5x^3 + 7x]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5x^3 + 15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 + 7x + 7h - 5x^3 - 7x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{15x^2h + 15xh^2 + 5h^3 + 7h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(15x^2 + 7 + 15xh + 5h^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 15x^2 + 7 + 15xh + 5h^2 = 15x^2 + 7 + 15x(0) + 5(0)^2$$

$$f'(x) = 15x^2 + 7.$$

3. $f(x) = 6$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[6] - [6]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0$$

$$f'(x) = 0.$$

Os itens anteriores corroboram com a afirmação de que o resultado encontrado na derivação não é a equação da reta tangente, mas a sua inclinação.

3.1 Propriedades da Diferenciação

Nesta subseção, analisaremos as derivadas de relações funcionais, entre elas, somas, diferenças, produtos e quocientes.

Diferentemente de como fizemos na seção sobre limites, demonstraremos todas as propriedades.

i) **Derivada de uma função constante**:

Se $f(x) = a$ é uma função constante, podemos prever que, por se tratar de uma diferença, a derivada de uma constante é nula:

$$f'(x) = 0. \tag{eq. 3.10}$$

No início da seção, discutimos que a derivada corresponde a uma taxa de variação. Se uma função é constante, então ela não varia. Um pouco depois, vimos que o significado geométrico da derivada é a inclinação da reta tangente à curva. No caso da função constante, não há inclinação e relação ao eixo das abscissas. O resultado nulo é, portanto, explicável para qualquer definição tomada.

- **Demonstração**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a) - (a)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0$$

$$f'(x) = 0.$$

Nota: *No caso de uma constante multiplicando uma função, ela pode ser desconsiderada na operação (ser posta em "evidência"), ou seja, para* $g(x) = kf(x)$, *temos* $g'(x) = \frac{d[kf(x)]}{dx} = kf'(x)$.

ii) **Derivada da soma ou da diferença entre funções**:

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções de mesma variável, podemos escrever a derivada da soma ou da diferença destas funções (como sendo a soma ou a diferença das derivadas:

$$\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}.$$

(eq. 3.11)

Então esta propriedade funciona de forma bastante intuitiva.

- **Demonstração**:

Seja $h(x) = f(x) + g(x)$, então:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$
$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$
$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

iii) **Derivada de um produto funcional**:

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções de mesma variável e $h(x) = f(x) \times g(x)$ é o produto funcional entre elas, calculamos a derivada de $h(x)$ através da equação:

$$h'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x).$$

(eq. 3.12)

Esta propriedade já funcionaria de forma menos intuitiva. Neste caso, podemos facilitar a compreenção da taxa de variação de $h(x)$ imaginando a premissa de que f ou g variam com x. Mesmo não sabendo como varia o produto, podemos entendê-lo superpondo dois termos: um relacionado à taxa de variação de $f(x)$ e outro relacionado à taxa de variação de $g(x)$. Por argumento de combinatória, o "ou" (que indica que ou $f(x)$, ou $g(x)$, ou ambas variam) indicariam a superposição desses termos como uma soma, normalmente, resultando na *equação 3.12*.

- **Demonstração**:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$
$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} g(x+h) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x).$$

iv) **Derivada do quociente funcional**:

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções de mesma variável e $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ é o quociente funcional entre elas, calculamos a derivada de $h(x)$ através da equação:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

(eq. 3.13)

Esta propriedade é ainda menos intuitiva que as anteriores, mas é facilmente demonstrada utilizando a *propriedade (iii)*.

- **Demonstração**:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x) \times h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \times h(x) + g(x) \times h'(x) = g'(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} + g(x) \times h'(x)$$

$$f'(x) \times g(x) = f(x) \times g'(x) + [g(x)]^2 \times h'(x)$$

$$h'(x) \times [g(x)]^2 = f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

3.2 Regra do Encadeamento

A *Regra do Encadeamento* ou *Regra da Cadeia* é a relação diferencial para funções compostas. Se $h(x) = f(g(x))$, então devemos imaginar que a taxa de variação de h em relação a x depende da taxa de variação de f em relação a g e de g em relação a x simultaneamente. Isso se dá, pois f varia com g, enquanto esta varia com x. Devido aos eventos simultâneos, poderíamos pensar que, por argumentos lógicos (os mesmos utilizados em *Combinatória* e no *Princípio Fundamental da Contagem*), o mais intuitivo seria realizar o produto entre estas taxas de variações, então escreve-se que:

$$\frac{d[h(x)]}{dx} = \frac{d[f(g(x))]}{dx} = \frac{d[f(g(x))]}{d[g(x)]}\frac{d[g(x)]}{dx}.$$

(eq. 3.20)

Pode parecer um método estranho, mas é bastante significativo e satisfatório, além de exato. Apesar de aparentar grande dificuldade, com um bom treino, seu uso passa a ser automático.

Talvez uma das dificuldades seja exatamente entender o que a fórmula quer dizer, mas uma rápida interpretação seria: "a derivada da função composta é dada pelo produto entre a derivada da função de 'dentro' e a derivada da função como um todo".

A notação de Leibniz para as derivadas parece ser um modo melhor de apresentar essa regra do que simplesmente mostrar a relação na forma representativa: $f'(g(x)) \times g'(x)$. Isso, porque pensando numa representação dimensional, as dimensões relacionadas a $g(x)$ se cancelariam (apesar de, nessa notação de derivada, o numerador possuir um significado totalmente diferente do denominador, portanto $dg(x)$ não se cancelaria de fato).

- **Demonstração**:

Da definição de derivada pela notação de Leibniz, temos:

$$\frac{d[h(x)]}{d[g(x)]} = \lim_{\Delta g(x)\to 0}\frac{\Delta h(x)}{\Delta g(x)}$$

Podemos, então, escrever:

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta g(x)} = \frac{dh(x)}{dg(x)} + \epsilon$$

$$\Delta h(x) = \frac{dh(x)}{dg(x)}\Delta g(x) + \epsilon\Delta g(x)$$

Lembrando que a condição adotada é de $\Delta g(x) \to 0$, o que também implicará em $\epsilon \to 0$.

Pela construção da última equação, observe que ela é válida até mesmo para $\Delta g(x) = 0$. Dividindo ambos os membros por Δx, que, devido a definição de derivada, não é nulo, obtemos:

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{dh(x)}{dg(x)}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \epsilon\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

Aplicando os devidos limites, compreendidos desdes às condições iniciais, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{dh(x)}{dg(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

Finalmente, resultando em:

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{dh(x)}{dg(x)} \times \frac{dg(x)}{dx}.$$

3.3 Principais Derivações

A vida é curta demais para que fiquemos calculando derivadas somente por sua definição. Devido a isso, listaremos diversas diferenciais relacionadas às principais funções que serão bastante eficazes em operações diferenciais.

i) **Derivada de função polinomial**:

Da forma mais básica possível, dada uma função $f(x) = x^n$, temos:

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

(eq. 3.30)

Esta fórmula é a mais conhecidade dentre as derivadas. Devido a isso, alguns acham erroneamente que há somente este tipo de derivação, enquanto que funções polinomiais são somente um tipo de função.

Algumas pessoas denominam a *equação 3.30* como *Regra do Tombo*, pois ocorre a "queda" do valor numérico do expoente, posicionando-se em frente à variável, multiplicando-a, enquanto que ele decai de uma unidade ainda como expoente.

- **Demonstração**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Expandindo e resolvendo o binomial, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1})}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}0 + ... + 0^{n-1} \right]$$

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Aparentemente, a demonstração por expansão binomial só serviria para $n \in N$ devido ao conhecimento de restrições que existem no uso deles, mas serve para qualquer constante complexa, pois o campo de uso dos binomiais é bem maior do que costumamos a aprender.

ii) **Derivada de funções exponenciais e logarítmicas**:

De início, nem conseguiríamos imaginar como realizar a derivação de uma função do tipo $f(x) = a^x$, pois, diferentemente de uma função polinomial, a variável se encontra na exponenciação. Um artifício matemático que nos ajudaria, por um exemplo, seria o de substituição, mas como realizá-lo? Primeiro, devemos descobrir a derivada de $f(x) = \ln(x)$, pois este resultado nos será vantajoso.

- **Realizando a derivação de** $f(x) = \ln(x)$:

Da definição, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Façamos $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$, então $\frac{1}{h} = \frac{n}{x}$. Perceba que enquanto $h \to 0$, $n \to \infty$, logo:

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

Substituindo o que for compatível à *equação 2.40*, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln(e)$$

$$f'(x) = \frac{d[\ln(x)]}{dx} = \frac{1}{x}.$$

(eq. 3.31)

A próxima etapa é calcular a derivada de $f(x) = \ln(e^x) = x$. Sabemos, então, que $f'(x) = 1$, mas utilizemos a regra da cadeia:

- **Cálculo de** $\frac{d[\ln(e^x)]}{dx} = 1$ **através da Regra da Cadeia**:

$$\frac{d[\ln(e^x)]}{dx} = \frac{d[\ln(e^x)]}{d(e^x)} \times \frac{d(e^x)}{dx}$$
$$1 = \frac{1}{e^x} \times \frac{de^x}{dx}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

(eq. 3.32)

Pode ainda não parecer, mas a *equação 3.32* será bastante útil na resolução de diferenciações de funções exponenciais.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, temos que a sua derivada resulta:

$$f'(x) = \ln(a) \times a^x.$$

(eq. 3.33)

- **Provando a** *equação 3.33*:

$$f'(x) = \frac{da^x}{dx} = \frac{d\left(\left[e^{\ln(a)}\right]^x\right)}{dx}$$
$$f'(x) = \frac{d\left(\left[e^x\right]^{\ln(a)}\right)}{dx} = e^x \ln(a) \left(\left[e^x\right]^{\ln(a)-1}\right)$$
$$f'(x) = \ln(a) \left(\left[e^x\right]^{\ln(a)}\right) = \ln(a) \times a^x$$

$$f'(x) = \ln(a) \times a^x.$$

Para funções logarítmicas $f(x) = \log_b(x)$, basta que façamos a mudança para a base e, que chegamos ao resultado:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(b) \times x}.$$

(eq. 3.34)

- **Provando a** *equação 3.34*:

$$f(x) = \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(b)} \times \frac{d[\ln(x)]}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(b) \times x}.$$

iii) **Derivada de funções trigonométricas**:

Neste caso, basta calcularmos as derivadas das funções seno e cosseno, pois quaisquer outras funções trigonométricas seriam obtidas a partir destas. Elas podem ser calculadas utilizando as propriedades de derivação ou a *Regra da Cadeia.*

Antes de desenvolver qualquer raciocínio, devemos saber um importante limite trigonométrico:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0.$$

(eq. 3.35)

• **Demonstrando a** *equação 3.35*:

Multipliquemos a expressão no limite por $1 + \cos(x)$, tanto no numerador, quanto no denominador, obtendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(x))\,(1 + \cos(x))}{x\,(1 + \cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos^2(x))}{x\,(1 + \cos(x))}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \times \frac{sen(x)}{(1 + \cos(x))}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \times \frac{sen(x)}{(1 + \cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{(1 + \cos(x))}$$

Conhecendo-se a *equação 2.30*, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{(1 + \cos(x))} = 1 \times \frac{\lim_{x \to 0} sen(x)}{\lim_{x \to 0}(1 + \cos(x))} = 1 \times \frac{0}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0.$$

Este resultado será importante para definir:

$$\frac{d[sen(x)]}{dx} = \cos(x).$$

(eq. 3.36)

- **Demonstrando a** *equação 3.36*:

A partir da definição de derivada, para $f(x) = sen(x)$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(h)sen(x) + sen(h)cos(x) - sen(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)cos(x)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)(1 - \cos(h))}{h}$$

$$f'(x) = cos(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} - sen(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{1 - cos(h)}{h}$$

$$f'(x) = cos(x) \times 1 - sen(x) \times 0$$

$$f'(x) = \frac{d[sen(x)]}{dx} = cos(x).$$

Para a obtenção da derivada do cosseno, basta fazermos $cos(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e utilizarmos a *Regra da Cadeia.* O resultado será:

$$\frac{d[cos(x)]}{dx} = -sen(x).$$

(eq. 3.37)

- **Demonstrando a** *equação 3.37*:

Fazendo $f(x) = cos(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, obtemos:

$$f'(x) = \frac{d\left[sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]}{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \times \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx}$$

$$f'(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times (-1)$$

$$f'(x) = \frac{d[cos(x)]}{dx} = -sen(x).$$

3.4 Derivadas de Ordens Superiores

A este ponto, você já deve ter percebido que as funções citadas podem ser deriváveis mais de uma vez. No *exemplo 2.1*, vimos a função $f(x) = 5x^3 + 7x$ e calculamos a sua derivada $f'(x) = 15x^2 + 7$ a partir da definição. Obviamente, $f'(x)$ ainda é uma função derivável, sendo possível calcular uma segunda derivada, que seria escrita nas formas:

$$f''(x) = f^{[2]}(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = 30x.$$

Essa segunda derivada de uma mesma função é chamada de *derivada segunda* ou *derivada de segunda ordem* e exprime como varia a taxa de variação da função em relação a sua variável. Um exemplo clássico de uma derivada segunda na prática é a aceleração de uma partícula, expressa em função da posição:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Sendo assim, podemos admitir que podemos derivar uma função $f(x)$ (desde que ela seja derivável) diversas vezes, ou seja, sua n-ésima derivada, $f^{[n]}(x)$, existe.

$$f^{[n]}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Existem ainda representações específicas para derivadas de ordens superiores nas ciências. Na Física, a derivada de um parâmetro q em relação ao tempo t é representada por:

$$\dot{q} = \frac{d}{dt}q.$$

É de praxe chamar a função $\dot{q}$ de *q-ponto.* A variável segunda do parâmetro q seria o *q-dois pontos*, ou seja:

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt}\dot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Um fato notório é que, a partir da $(n+1)^{\text{a}}$ derivada de uma função polinomial de grau n, o resultado é sempre nulo. Outro fato notório é a periodicidade das derivadas trigonométricas, pois, a cada derivada de ordem mútilpla de 4, o resultado torna à função trigonométrica original, sejam as funções seno ou cosseno.

- **Demonstração**:

1. Seja $f(x) = sen(x)$, calculemos a partir das propriedades já conhecidas, sua derivada de ordem 4:

$$f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$$

$$f'(x) = cos(x) \Rightarrow f''(x) = -sen(x)$$

$$f''(x) = -sen(x) \Rightarrow f'''(x) = -cos(x)$$

$$f'''(x) = -cos(x) \Rightarrow f^{[4]}(x) = sen(x)$$

$$f^{[4]}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\left[sen(x)\right] = sen(x).$$

2. Seja $f(x) = cos(x)$, calculemos a partir das propriedades já conhecidas, sua derivada de ordem 4:

$$f(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sen(x)$$

$$f'(x) = -sen(x) \Rightarrow f''(x) = -cos(x)$$

$$f''(x) = -cos(x) \Rightarrow f'''(x) = sen(x)$$

$$f'''(x) = sen(x) \Rightarrow f^{[4]}(x) = cos(x)$$

$$f^{[4]}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\left[cos(x)\right] = cos(x).$$

3.5 Construindo uma Função: Interpretando Pontos Críticos e Concavidades

Ponto crítico é um ponto pertencente a função em que ou a derivada nele não existe ou ela é nula. No caso de uma função contínua, pode até ser difícil interpretar uma localidade em que a derivada não exista, mas é um caso comum em funções com crescimentos ou decrescimentos abruptos, repentinos.

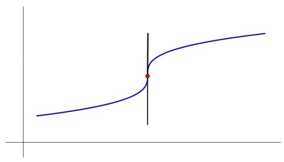

Figure 10: Crescimento abrupto de uma função. Analisando a derivada como a reta tangente, observamos que ela é perpendicular ao eixo das abiscissas. Nestas condições, ela é incapaz de existir, pois não existe $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

O ponto vermelho da imagem acima também representa um **ponto de inflexão vertical**. Uma **inflexão** é um ponto da curva em que há a alternância de sinal da derivada de segunda ordem da função, sendo também uma alternância de sentido da concavidade, como perceberemos mais tarde. Além de pontos de inflexão verticais, podemos ter **pontos de inflexão horizontais**, como mostra a figura a seguir.

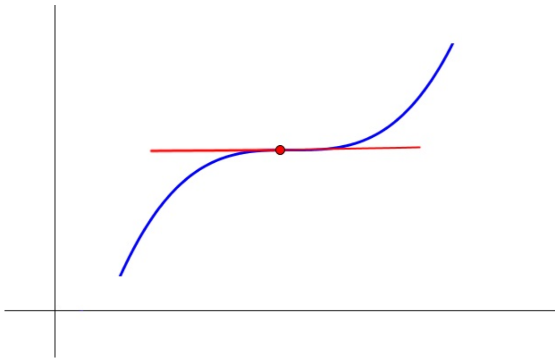

Figure 11: Um trecho de função que apresenta um ponto de inflexão horizontal. Percebe-se que a derivada no ponto existe, porém é nula.

Não só os pontos de inflexão horizontais são ocasionados por derivadas de primeira ordem nulas. Em um intervalo adotado, isto é, analisando apenas um trecho de uma função $f(x)$, quando $f'(x) = 0$ e não há alternância na concavidade, obtemos um **máximo ou mínimo local**, que também pode ser chamado de **máximo ou mínimo relativo**.

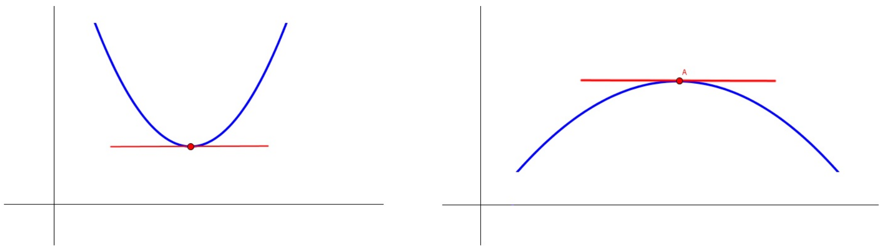

Figure 12: Percebe-se que tanto o máximo local quanto no mínimo local são pontos de inclinação nula, ou seja, $f'(x) = 0$.

Vale ressaltar que um máximo ou mínimo local ocorre quando $f'(x) = 0$, pois é o ponto em que ocorre a troca de sinal da derivada da função. Contudo, $f''(x)$ parmanece com o mesmo sinal imediatamente antes e depois destes pontos críticos.

Mas por que ser tão rigoroso, especificando sempre o termo "local"? Isso é importante, pois nem sempre sabemos como se comporta o resto da função. Em outras palavras, quando uma função tem um máximo (rigorosamente, o valor máximo da função), podemos ainda considerar este ponto como um máximo local para o intervalo adotado. Embora um máximo absoluto possa ser considerado um máximo local, este nem sempre é um máximo absoluto. Como inclinações da reta tangente nula indicam qualquer máximo local, então é melhor utilizarmos o termo mais seguro.

Se ainda não estiver claro, então vamos dar uma olhada na imagem a seguir. A explicação estará em sua legenda.

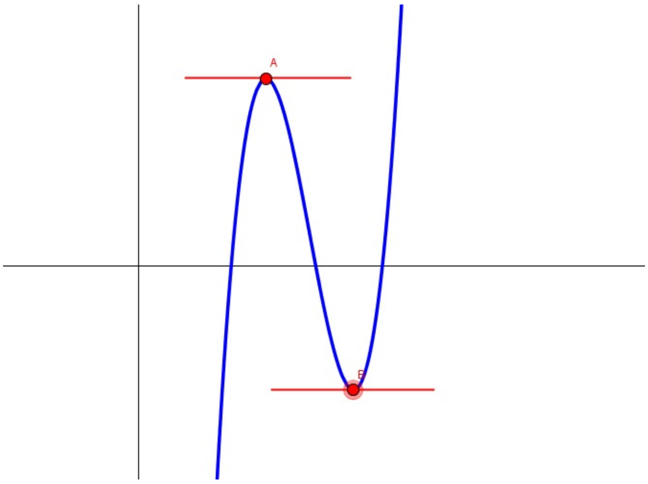

Figure 13: Neste caso, o ponto A é um máximo local naquela vizinhança, mas para valores de x bem maiores, a função tende ao infinito, tirando o título de máximo absoluto da função do ponto A. Algo semelhante ocorre com o ponto B, que é apenas um mínimo local.

Agora devemos verificar o porquê da derivada segunda designar uma concavidade direcionada ou para cima ou para baixo. Primeiro, mesmo com alguma imagem, seria difícil de mostrar estes significados, pois é necessário movimentação, dinâmica para que seja mais fácil de absorver as informações, então é recomendável que siga as instruções com uma folha de papel à frente e um lápis à mão.

Traçando-se retas tangentes ao longo de uma concavidade voltada para cima, que representa um ramo convexo da função, você perceberá que, enquanto as retas tangentes forem se aproximando do mínimo local da esquerda à direita, elas possuem inclinações negativas, mas, em módulo, sua inclinação vai diminuindo. Em outras palavras, parte-se de uma inclinação muito negativa até inclinações menos negativas. Ao chegar no mínimo local, a inclinação se anula. Quando ultrapassa-se o mínimo relativo, a inclinação passa a ter valores positivos e, assim, aumentando cada vez mais até a extremidade do intervalo da concavidade. Nesta ordem, a *derivada primeira* sai de valores negativos a valores positivos de modo que sempre esteja aumentando seu valor, isto é, sua taxa de variação é sempre positiva, mas a taxa de variação da *derivada primeira* é exatamente a *derivada segunda*.

Proposição: *Se em um intervalo I tem-se $f''(x) > 0$, então a função é convexa neste intervalo, ou seja, a sua concavidade é voltada para cima.*

De modo semelhante, traçando-se retas tangentes ao longo de uma concavidade voltada para baixo, que representa um ramo côncavo da função, você perceberá que, enquanto as retas tangentes forem se aproximando do máximo local da esquerda à direita, elas possuem inclinações positivas, mas sua inclinação vai diminuindo. Em outras palavras, parte-se de uma inclinação maiores até inclinações menores. Ao chegar no máximo local, a inclinação se anula. Quando ultrapassa-se o máximo relativo, a inclinação passa a ter valores negativos e, assim, adotando valores cada vez mais negativos até a extremidade do intervalo da concavidade. Nesta ordem, a *derivada primeira* sai de valores positivos a valores negativos de modo que sempre esteja diminuindo seu valor, isto é, sua taxa de variação é sempre negativa. Novamente, a taxa de variação da *derivada primeira* é exatamente a *derivada segunda*, que é negativa neste caso.

Proposição: *Se em um intervalo J tem-se $f''(x) < 0$, então a função é côncava neste intervalo, ou seja, a sua concavidade é voltada para baixo.*

Se for feito o mesmo tipo de análise que fizemos das concavidades em trechos côncavos e convexos de funções em pontos de inflexão, como os das figuras 6 e 7, será perceptível a mudança de sinal da *derivada primeira* exatamente no ponto de inflexão, implicando em uma mudança automática da concavidade.

Agora que compreendemos os conceitos de continuidade, pontos críticos e concavidades, podemos utilizar estes conhecimentos para construir o gráfico de uma função a partir somente de seu argumento.

A **otimização** é utilizar o resultado de que $f'(x) = 0$ pode representar os valores extremos (máximos ou mínimos) de uma função $f(x)$ para obter proveito da variável ou da própria função nesse ponto. Isso é importante, pois há várias grandezas que desejamos maximizar ou minimizar. Uma empresa, por exemplo, sempre quer maximizar seu lucro e minimizar suas despezas.

Obviamente a otimização pode ser utilizada em qualquer caso em que temos uma "situação limite", uma maximização ou uma minimização. A seguir, serão demonstradas duas regras importantes da óptica geométrica nos casos de reflexão e de refração em que se tratarão valores extremos para uma determinada função, pois se baseiam no **Princípio de Fermat**:

"A trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é um mínimo".

- **Demonstração: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.**

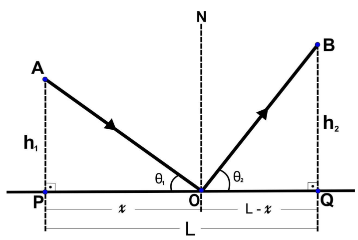

Figure 14: O feixe luminoso parte do ponto A, interage com a superfície no ponto P, refletindo-se, e segue em direção ao ponto B.

Cria-se uma função $D(x)$ que indica o deslocamento realizado pela luz. Sendo assim, precisamos calcular as trajetórias $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ em função de x. Sendo assim, utilizemos o *Teorema de Pitágoras* em ΔAOP:

$$\left(\overline{AO}\right)^2 = {h_1}^2 + x^2$$

$$\overline{AO} = \sqrt{{h_1}^2 + x^2}.$$

Utilizando o *Teorema de Pitágoras* em ΔBOQ:

$$\left(\overline{OB}\right)^2 = {h_2}^2 + (L-x)^2$$

$$\overline{OB} = \sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}.$$

Segundo o *Princípio de Fermat*, a luz deve percorrer a menor trajetória possível, então a função deslocamento $D(x) = \overline{AO} + \overline{OB}$ deve ser minimizada, portanto:

$$D'(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{{h_1}^2 + x^2} + \sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} - \frac{2(L-x)}{2\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} = \frac{L-x}{\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}}.$$

Este resultado pode ser escrito de uma outra forma, pois, calculando os senos de θ_1 e de θ_2, obtemos:

$$sen(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}}.$$

$$sen(\theta_2) = \frac{L-x}{\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}}.$$

O que resulta em:

$$sen(\theta_1) = sen(\theta_2).$$

Como ambos os arcos se encontram no primeiro quadrante, pois são ângulos de um triângulo retângulo, cada, então podemos concluir:

$$\theta_1 = \theta_2.$$

- **Demonstração: lei de Snell-Descartes da refração.**

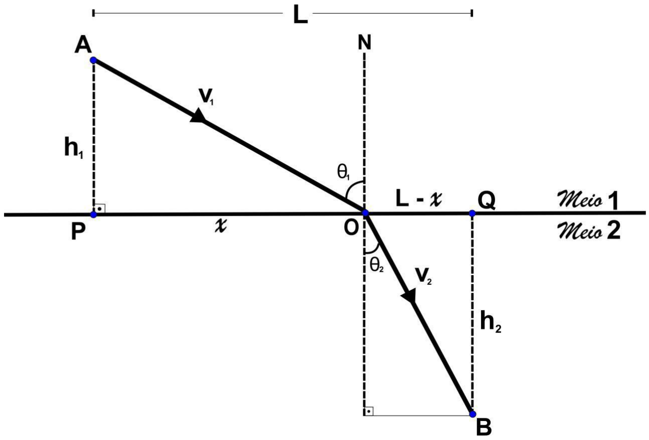

Figure 15: O feixe luminoso parte do ponto A, interage com a superfície que delimita os dois meiois no ponto P, refratando-se, e segue em direção ao ponto B. No meio 1, a velocidade da luz vale v_1 e o índice de refração é n_1. No meio 2, a velocidade da luz vale v_2 e o índice de refração é n_2.

A *Lei de Snell-Descartes* resulta em:

$$n_1 sen(\theta_1) = n_2 sen(\theta_2).$$

Em que, sendo c a velocidade da luz no vácuo, o índice de refração do meio i é dado por:

$$n_i = \frac{c}{v_i}.$$

Cria-se uma função $\Delta t(x)$ que indica o tempo decorrido ao ser realizado o trajeto pela luz. Sendo assim, precisamos calcular os intervalos de tempo Δt_1 e Δt_2 em função de x. Sendo assim, calculemos Δt_1:

$$\Delta t_1 = \frac{\overline{AO}}{v_1}$$

$$\Delta t_1 = \frac{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}}{v_1}.$$

Agora, calculemos Δt_2:

$$\Delta t_2 = \frac{\overline{OB}}{v_2}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\sqrt{{h_2}^2 + (L - x)^2}}{v_2}.$$

Segundo o Princípio de Fermat, a luz deve percorrer esta trajetória no menor intervalo de tempo possível, então a função $\Delta t(x) = \Delta t_1 + \Delta t_2$ deve ser minimizada, portanto:

$$\Delta t'(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}}{v_2}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{2v_1\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} - \frac{2(L-x)}{2v_2\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}} = 0$$

$$\frac{1}{v_1} \times \frac{x}{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \times \frac{L-x}{\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}} = 0$$

$$\frac{1}{v_1} \times \frac{x}{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \times \frac{L-x}{\sqrt{{h_2}^2 + (L-x)^2}}.$$

Mas já sabemos que isto equivale a:

$$\frac{sen(\theta_1)}{v_1} = \frac{sen(\theta_2)}{v_2}$$

Que já é uma forma de expressar a *Lei de Snell-Descartes*, mas, multiplicando--se pela velocidade da luz nos dois membros, tem-se:

$$\frac{c}{v_1} sen(\theta_1) = \frac{c}{v_2} sen(\theta_2)$$

Que, finalmente, resulta em:

$$n_1 sen(\theta_1) = n_2 sen(\theta_2).$$

3.6 Teorema do Valor Médio da Diferenciação

Considere uma viagem realizada por um carro, de uma cidade a outra, cuja velocidade média foi de 50 km/h. Obviamente a função horária da velocidade $v(t)$ é contínua, pois há algum tipo de aceleração (mesmo que nula) durante o trajeto.

Se, em algum momento da viagem, este carro se locomoveu com velocidades abaixo da velocidade média, então, em algum outro momento da viagem, ele teve que se locomover com velocidades acima destas, compensando aquelas velocidades inferiores, para que a velocidade média continuasse sendo 50 km/h.

Em algum instante da viagem, este carro teve que passar das velocidades inferiores para as velocidades superiores à velocidade média. Em outras palavras: em algum momento da viagem, o carro teve que atingir a velocidade média de 50 km/h. Em algum momento, sua velocidade instantânea foi igual à sua velocidade média.

Este raciocínio intuitivo é o mesmo usado no *Teorema do Valor Médio* da diferenciação, que será enunciado a seguir.

Se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um $a < \overline{x} < b$ que satisfaz:

$$f'(\overline{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(eq. 3.40)

Observando com atenção, conseguimos relacionar com o contexto das velocidades. Isso se dá, pois a expressão do segundo membro da igualdade representa a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, o que estaria relacionado à velocidade média do carro. Já a expressão do primeiro membro, é uma derivada, portanto estaria relacionada à velocidade instantânea do carro em algum ponto do percurso.

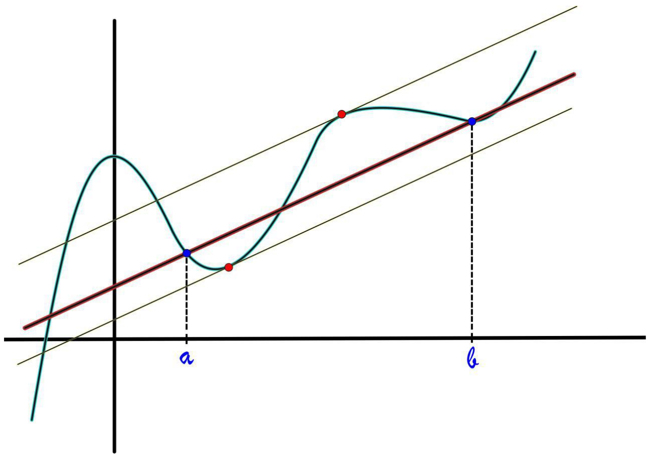

Figure 16: Para este gráfico, fica perceptível que pode existir mais de um valor $a < \overline{x} < b$ que sustenta a mesma inclinação que a secante indicada.

Ainda complementando a analogia, a e b corresponderiam ao tempo de início da viagem e ao tempo de término da viagem, respectivamente. Sendo assim, $\overline{x} \in (a, b)$, pois a velocidade de 50 km/h foi atingida em algum momento durante a viagem.

3.7 Derivada da Função Inversa

Como certeza, este é um dos tópicos mais complicados de explanar. O conceito de função inversa, em si, parece algo bastante complexo, mas o intuito aqui é facilitar a compreensão. Em termos simples, se uma função $f(x)$ é avaliada a partir de x, a função inversa é tal que, a partir de $f(x)$, avalia-se x. A função inversa de $f(x)$ é representada por $f^{-1}(x)$.

- **Exemplo 2.2** *Se* $f(x) = 2x^2 - 5$ *e* $g(x) = 4x + 1$, *determine* $(f \circ g)^{-1}(x)$.

Primeiro, calculemos a composição $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

$$(f \circ g)(x) = 2.[g(x)]^2 - 5$$
$$(f \circ g)(x) = 2(4x+1)^2 - 5.$$

Para calcular sua inversa, devemos isolar a variável x, portanto, para $h(x) = (f \circ g)(x)$:

$$h(x) = 2(4x+1)^2 - 5$$
$$2(4x+1)^2 = h(x) + 5$$
$$(4x+1)^2 = \frac{h(x)+5}{2}$$
$$4x+1 = \sqrt{\frac{h(x)+5}{2}}$$
$$4x = \sqrt{\frac{h(x)+5}{2}} - 1$$
$$x = \frac{\sqrt{\frac{h(x)+5}{2}} - 1}{4}.$$

Como $h(x)$ está fazendo o papel de um elemento do domínio estabelecido e x de um elemento do contradomínio, então vamos alterar as variáveis, fazendo:

$$h^{-1}(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+5}{2}} - 1}{4}$$
$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+5}{2}} - 1}{4}.$$

Essa mudança de variável é essencial para abordar a seguinte propriedade:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x. \qquad \text{(eq. 3.50)}$$

Agora fica claro que a função inversa f^{-1} é aquela que desfaz as operações realizadas pela função f. No primeiro membro da *eq. 3.50*, a função f irá desfazer as operações feitas por f^{-1}; no segundo, f^{-1} que irá desfazer as operações realizadas por f. Sendo assim, retornar-se-á ao número incial, x.

Obviamente, nem toda função terá uma inversa, pois o x e o $f(x)$ devem ter uma relação biunívoca. Em outras palavras: um função possui inversa, se, e somente se, for bijetora.

Uma importante propriedade gráfica da função inversa é que sua curva é simétrica à da função original pela bissetriz dos quadrantes ímpares, isto é, o gráfico da função inversa $f^{-1}(x)$ é o reflexo do gráfico da função $f(x)$ em relação à reta $f(x) = x$. Uma outra propriedade é que a reta tangente à função f em um ponto pertencente à ela tem como inversa a reta tangente à f^{-1} no ponto simétrico a este, e os coeficientes angulares destas retas são inversos entre si.

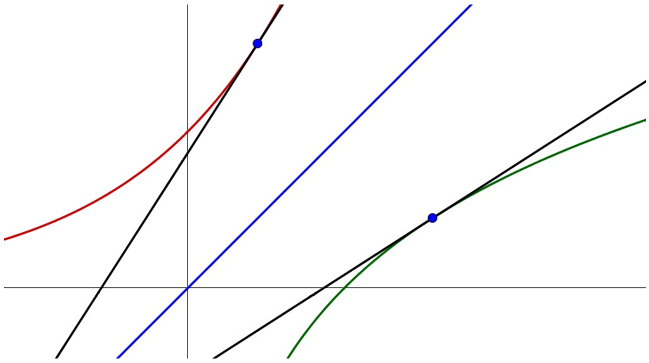

Figure 17: A função $f(x)$ (em verde) tem como inversa a função $g(x)$ (em vermelho), que tem o gráfico simétrico ao de $f(x)$ em relação à reta $f(x) = x$. Sendo assim, escreve-se $g(x) = f^{-1}(x)$ ou $f(x) = g^{-1}(x)$.

Se o ponto $(x, y) = (x, g(x))$ pertence à curva de g, então o seu simétrico $(y, x) = (y, g^{-1}(y))$ pertence à curva g^{-1}. A inclinação da reta tangente à g em (x, y) é:

$$m_g = g'(x).$$

Se $f(x) = g^{-1}(x)$, a inclinação da reta tangente à g^{-1} em (y, x) é:

$$m_{g^{-1}} = f'(y).$$

Como estas retas tangentes também se relacionam como inversas uma da outra, então:

$$m_g = \frac{1}{m_{g^{-1}}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

Como $y = g(x) = f^{-1}(x)$, então:

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{eq. 3.51}$$

Toda essa interpretação geométrica resulta na *eq. 3.51*, que é exatamente a fórmula utilizada para calcular a derivada da função inversa. Ela possui muitas trocas de variáveis, o que pode ser tornar bastante confuso, mas podemos demonstrá-la por um caminho mais simples e análitico.

- **Demonstração**:

Através da *eq. 3.50*, tem-se a propriedade:

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Diferenciando-se em relação a x e utilizando a *Regra da Cadeia*, obtemos:

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx}x$$
$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- **Exemplo 2.3** *Determine as derivadas das seguintes funções*:

1. $arcsen(x)$;

   Da função $f(x) = sen(x)$, tem-se $f^{-1}(x) = arcsen(x)$, então:

   $$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
   $$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{cos(arcsen(x))}.$$

   Se $\theta = arcsen(x)$, então $sen(\theta) = x$, mas:

   $$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$
   $$x^2 + cos^2(\theta) = 1$$
   $$cos^2(\theta) = 1 - x^2$$
   $$cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}.$$

   Sendo admitida apenas a raiz positiva, pois $f(x) = sen(x)$ está definida para $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, em que $cos(x) > 0$. Sendo assim, obtém-se:

   $$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{cos(\theta)}$$
   $$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   $$\frac{d}{dx}arcsen(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

   A derivada é sempre positiva, o que indica que, para o intervalo definido como $-1 \leq x \leq 1$, a função $f(x) = arcsen(x)$ é sempre crescente.

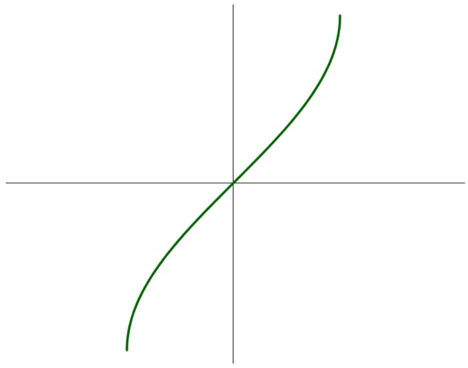

Figure 18: Gráfico da função $f(x) = arcsen(x)$.

2. $arccos(x)$;

   Da função $f(x) = cos(x)$, tem-se $f^{-1}(x) = arccos(x)$, então:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{sen(arccos(x))}.$$

   Se $\theta = arccos(x)$, então $cos(\theta) = x$, mas:

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$
$$sen^2(\theta) + x^2 = 1$$
$$sen^2(\theta) = 1 - x^2$$
$$sen(\theta) = \sqrt{1 - x^2}.$$

   Sendo admitida apenas a raiz positiva, pois $f(x) = cos(x)$ está definida para $x \in [0, \pi]$, em que $sen(x) > 0$. Sendo assim, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{sen(\theta)}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

   A derivada é sempre negativa, o que indica que, para o intervalo definido como $-1 \leq x \leq 1$, a função $f(x) = arccos(x)$ é sempre decrescente.

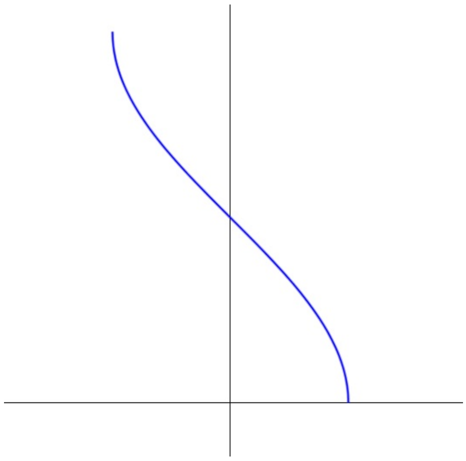

Figure 19: Gráfico da função $f(x) = arccos(x)$.

3. $arctg(x)$;

   Da função $f(x) = tg(x)$, tem-se $f^{-1}(x) = arctg(x)$, então:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{sec^2(arctg(x))}.$$

   Se $\theta = arctg(x)$, então $tg(\theta) = x$, mas:

$$sec^2(\theta) = tg^2(\theta) + 1$$
$$sec^2(\theta) = x^2 + 1.$$

   Sendo assim, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{sec^2(\theta)}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   A derivada é sempre positiva, o que indica que, para um x real, a função $f(x) = arctg(x)$ é crescente.

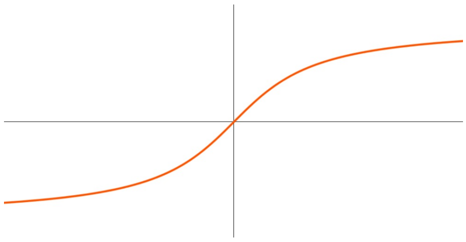

Figure 20: Gráfico da função $f(x) = arctg(x)$.

4. $arccotg(x)$;

   Da função $f(x) = cotg(x)$, tem-se $f^{-1}(x) = arccotg(x)$, então:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{cossec^2(arccotg(x))}.$$

   Se $\theta = arccotg(x)$, então $cotg(\theta) = x$, mas:

$$cossec^2(\theta) = cotg^2(\theta) + 1$$
$$cossec^2(\theta) = x^2 + 1.$$

   Sendo asim, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{cossec^2(\theta)}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}arccotg(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

   A derivada é sempre negativa, o que indica que, para um x real, a função $f(x) = arccotg(x)$ é decrescente.

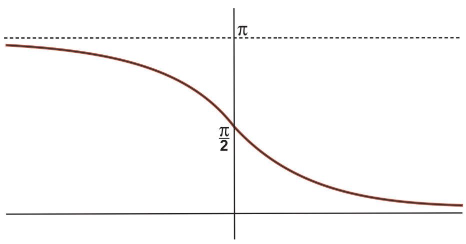

Figure 21: Gráfico da função $f(x) = arccotg(x)$.

5. $arcsec(x)$;

Dada a função $f(x) = sec(x)$, tem-se $f^{-1}(x) = arcsec(x)$, então:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{sec(arcsec(x))tg(arcsec(x))}.$$

Se $\theta = arcsec(x)$, então $sec(\theta) = x$, mas:

$$sec^2(\theta) = tg^2(\theta) + 1$$
$$tg^2(\theta) = sec^2(\theta) - 1$$
$$tg(\theta) = \pm\sqrt{sec^2(\theta) - 1}.$$
$$tg(\theta) = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$$

Sendo assim, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{sec(\theta)tg(\theta)}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

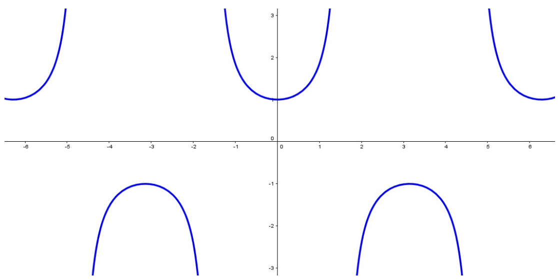

Figure 22: Gráfico da função $f(x) = sec(x)$.

Inicialmente, para que a função $f(x) = sec(x)$ admita inversa, devemos definir um domínio e uma imagem de tal forma que ela se torne bijetora. Sendo assim, definimos $D(f) = [0, \pi] - \pi/2$ e $Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$. Para $f^{-1}(x) = arcsec(x)$, tem-se $D(f^{-1}) = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = D(f)$.

Se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, então $x \geq 1$ e $tg(\theta) > 0$, portanto $\frac{d\theta}{dx} > 0$; e, quando $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, ocorre $x \leq -1$ e $tg(\theta) < 0$, portanto $\frac{d\theta}{dx} > 0$. Sendo assim, conclui-se:

$$\frac{d}{dx}arcsec(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

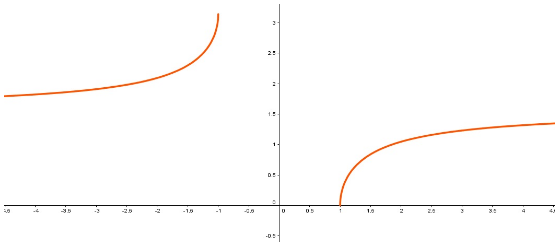

Figure 23: Gráfico da função $f(x) = arcsec(x)$, com imagem $Im(f) = [0, \pi] - \pi/2$.

Observando o gráfico, percebe-se que a função $f(x) = arcsec(x)$ é sempre crescente, o que é explicável, pois a sua derivada é sempre positiva nos intervalos atribuídos a $D(f)$ e $Im(f)$.

Outra forma de definir um domínio para tornar $f(x) = sec(x)$ bijetora, mas mantendo a mesma imagem, é fazendo $D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Isso causará a seguinte alteração na fórmula da derivada da função inversa $f^{-1}(x)$:

$$\frac{d}{dx} arcsec(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

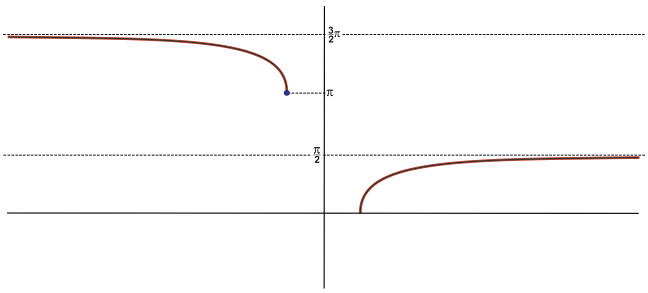

Figure 24: Gráfico da função $f(x) = arcsec(x)$, com imagem $Im(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Neste caso, para $x \leq -1$, a derivada é negativa, portanto a função decresce; para $x \geq 1$, a derivada se torna positiva e a função passa a ser crescente.

6. $arccossec(x)$.

Dada a função $f(x) = cossec(x)$, tem-se $f^[-1](x) = arccossec(x)$, então:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = -\frac{1}{cossec(arccossec(x)).cotg(arccossec(x))}.$$

Se $\theta = arccossec(x)$, então $cossec(\theta) = x$, mas:

$$cossec^2(\theta) = cotg^2(\theta) + 1$$
$$cotg^2(\theta) = cossec^2(\theta) - 1$$
$$cotg(\theta) = \pm\sqrt{cossec^2(\theta) - 1}$$
$$cotg(\theta) = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$$

Sendo assim, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{cossec(\theta).cotg(\theta)}$$
$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

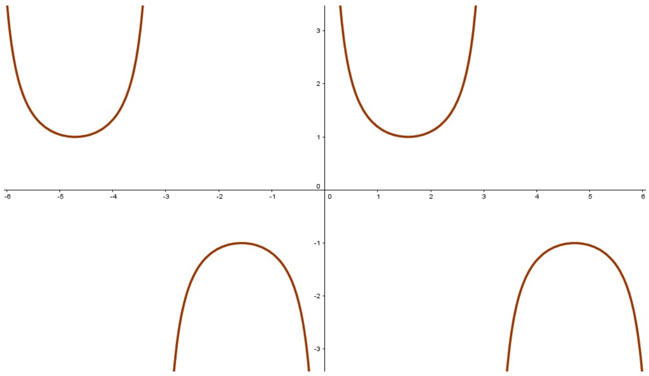

Figure 25: Gráfico da função $f(x) = cossec(x)$.

Para que a função $f(x) = cossec(x)$ admita inversa, devemos definir um domínio e uma imagem de tal forma que ela se torne bijetora. Seja, então, $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - 0$ e $Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$; para $f^{-1}(x) = arccossec(x)$, tem-se $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - (-1, 1)$ e $Im(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - 0$.

Considerando ainda $\theta = arccossec(x)$, se $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$, então $x \leq -1$ e $cotg(\theta) < 0$, portanto $\frac{d\theta}{dx} < 0$; se $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então $x \geq 1$ e $cotg(\theta) > 0$, portanto $\frac{d\theta}{dx} < 0$. Sendo assim, conclui-se:

$$\frac{d}{dx}arccossec(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Observando o gráfico, percebe-se que a função $f(x) = arccossec(x)$ é sempre decrescente, o que é de se esperar, pois sua derivada é negativa para os intervalos atribuídos a $D(f)$ e $Im(f)$.

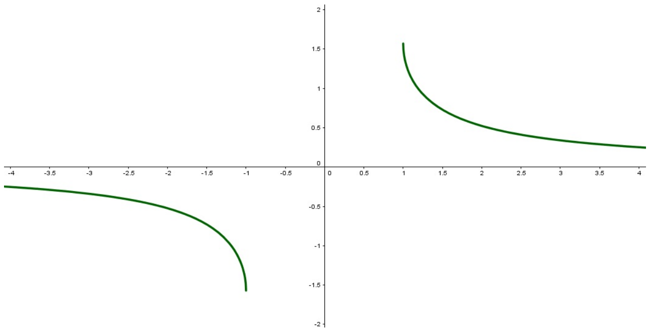

Figure 26: Gráfico da função $f(x) = arccossec(x)$, com imagem $Im(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - 0$.

Uma outra forma de definir um domínio para tornar $f(x) = cossec(x)$ bijetora é adotar $D(f) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Isso causará a seguinte alteração na fórmula da derivada da função inversa $f^{-1}(x)$:

$$\frac{d}{dx} arccossec(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

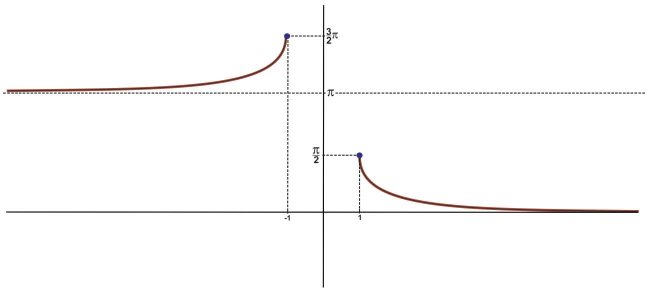

Figure 27: Gráfico da função $f(x) = arccossec(x)$, com imagem $Im(f) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Neste caso, para $x \leq -1$, a derivada é positiva, portanto a função é crescente; para $x \geq 1$, a derivada é negativa e a função passa a ser decrescente.