Tétel (a maradékos osztás tétele)**.** *Ha* $f, g \in T[x]$*, és* $g \neq 0$*, akkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott* $q, r \in T[x]$ *polinomok, amelyekre* $f = qg + r$ *és* $\deg r < \deg g$*.*

Biz. Először az egzisztenciát bizonyítjuk. Legyen $g = b_\ell x^\ell + \cdots + b_1 x + b_0$, ahol $b_\ell \neq 0$ (tehát g fokszáma ℓ). Tekintsük az $M = \{f - qg \mid q \in T[x]\}$ halmazt, és legyen $r_0 = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ az M halmaz legkisebb fokszámú eleme (ahol szokás szerint $a_k \neq 0$). Célunk megmutatni, hogy ....

Indirekt módon bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy .... Jelölje q_1 az .... polinomot (az ilyen polinomot, mivel csak egy tagból áll, szokás *monomnak* nevezni). Ekkor az

$$r_1 := r_0 - q_1 g = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0 - (a_k x^k + a_k b_\ell^{-1} b_{\ell-1} x^{k-1} + \cdots + a_k b_\ell^{-1} b_0 x^{k-\ell})$$

polinom foka kisebb, mint ....

Mivel $r_0 \in M$, létezik olyan $q_0 \in T[x]$ polinom, amelyre $r_0 =$ .... Ebből következik, hogy $r_1 = f - (\ldots\ldots\ldots\ldots) \cdot g$, azaz $r_1 \in$ .... Ez pedig ellentmond r_0 választásának, hiszen .... $< \deg r_0$.

Az unicitás igazolásához tegyük fel, hogy $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$, ahol $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$. Célunk megmutatni, hogy .... és .... A fokszámokra feltett egyenlőtlenségből következik, hogy $\deg(r_2 - r_1) <$ .... Másrészt átrendezéssel kapjuk, hogy $(q_1 - q_2) \cdot g =$ ...., tehát

$$\deg(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \deg \ldots\ldots\ldots\ldots = \deg(\ldots\ldots\ldots\ldots).$$

Tudjuk, hogy itt a jobb oldal kisebb, mint ...., ezért $\deg(q_1 - q_2) <$ .... Ez csak úgy lehet, hogy $\deg(q_1 - q_2) =$ ...., azaz ...., ebből pedig már rögtön következik az is, hogy ...., és épp ezt kellett bizonyítanunk. $\square$