Dimensões de um Atrator

Davi Lazzari, *(232847) - Sistemas Dinâmicos - UFRGS*

Porto Alegre, 01 de dezembro de 2015

Este trabalho apresenta a conceituação de Dimensões Fractais (ou fracionadas), a forma como sistemas dinâmicos podem apresentar objetos fractais, a forma de se calcular a dimensão destes objetos e, consequentemente, de se obter as relações de "informação"do sistema.

Introdução

Sistemas dinâmicos são sistemas de uma ou mais equações que evoluem no tempo e descrevem o movimento. São equações que podem descrever a evolução de "objetos"dentro do espaço de variedades específicas. Tomando como exemplo um sistema que descreva a dinâmica de um objeto físico, as possibilidades de movimento são restritas aos graus de liberdade que são permitidos ao objeto. A característica marcante da evolução do movimento é que a mudança desse movimento depende diretamente do ponto que se estuda em relação à todos os graus de liberdade. Assim, para posicionar um objeto frente à sua variação dinâmica, define-se um espaço que possui a informação da posição e da forma como ele varia, chamado *Espaço de Fase*.

Um exemplo de sistema dinâmico é o pêndulo, em que se tem uma massa presa à uma vareta delgada que oscila em torno de um ponto fixo. Conhecendo o ângulo que o fio faz com uma barra imaginária que une o ponto de oscilação ao ponto fixo, e a forma como este ângulo varia, pode-se definir sua posição no espaço de fase. A variação da posição da partícula neste espaço abstrato é definida como uma trajetória, que possui toda a informação necessária para se caracterizar o movimento do pêndulo para qualquer tempo, permite inclusive especulações como tempos negativos (como o movimento se daria para o tempo "correndo ao contrário").

Para um pêndulo real, sabe-se que após determinado tempo, sua oscilação cessará, devido à perda de energia por atrito com as moléculas de ar e pelas moléculas da corda. Tem-se então um sistema que deixa de ser dinâmico, o ponto em que isto ocorre é chamado de ponto de equilíbrio, ou no caso do pêndulo, ponto de equilíbrio estável, também chamado de ponto fixo do sistema, uma vez que para condições iniciais iguais a este ponto o sistema não se move. No caso do pêndulo, este ponto seria exatamente a orígem do espaço de fase, o que é facil de conceber, uma vez que ao se montar um pêndulo, se não deslocá-lo ou impor alguma velocidade, ele jamais sairá do seu equilíbrio (ângulo $= 0$).

Como o sistema perde energia para o meio, ele é considerado um sistema não conservativo, ou um sistema dissipativo. Se imaginar-se a trajetória do pêndulo em um espaço de fase, terá-se uma espiral que converge para o ponto de equilíbrio, independente das condições iniciais dadas ao pêndulo, isto caracteriza o ponto de equilíbrio como um atrator, uma vez que ele "atrai"as trajetórias no espaço de fase. Pode-se então determinar que todo o atrator de um sistema, seja oriundo de um sistema dissipativo, uma vez que a definição de dissipação seja dada em função da variação de um "volume"tomado no espaço de fase. Se se tomar duas condições iniciais quaisquer para o caso do pêndulo, para um tempo infinitamente grande elas convergirão ao mesmo ponto, se pensar-se o "volume"do espaço de fase em termos da distância das duas trajetórias, elas tenderão a zero, como ocorre uma diminuição do "volume", o sistema é

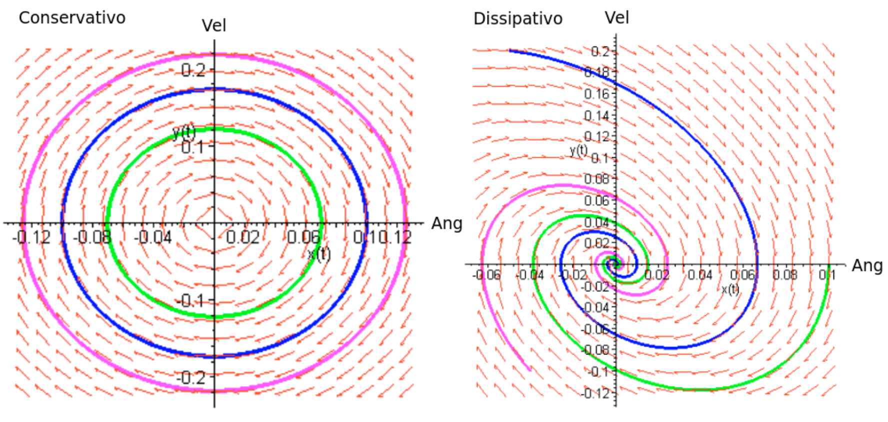

Figura 1: *Espaço de Fase de um pêndulo conservativo e dissipativo, respectivamente, orbitas elípticas e espirais.*

dissipativo e o ponto é um atrator.

Um sistema pode apresentar ainda pontos de quilíbrio que sejam instáveis, e mesmo, pontos de equilíbrio neutro, que seria o equivalente a, respectivamente, o pêndulo no ângulo de 90 graus, e um pêndulo ideal conservativo, que nunca perderá energia para o meio, sempre manterá o seu movimento e nunca será atraído para o ponto ângulo = 0.

Definição de um Atrator

Um ponto fixo é um ponto em que o sistema deixa de ser dinâmico, ou seja, não varia mais com o tempo:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 0 \rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) = cte \tag{1}$$

Este ponto pode ser um ponto de equilíbrio estável, se as trajetŕorias de uma determinada região do espaço de fase são atraídas para ele, ou instável, se elas são repelidas.

Um atrator é um conjunto de pontos limitado e fechado A ao qual as trajetórias podem convergir no espaço de fase, estas trajetórias representam sistemas dissipativos uma vez que para diferentes condições iniciais, convergem ao mesmo conjunto A.

Um conjunto fechado de pontos A é definido como atrator se:

- A é um conjunto invariante, ou seja, para qualquer condição inicial dentro deste conjunto, em qualquer tempo, o ponto no espaço de fase permanecerá no conjunto. [$\forall \boldsymbol{x}(0) \in A \rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in A$ para $\forall t$]
- Existe um conjunto aberto B tal que $A \subseteq B$, em que $\forall \boldsymbol{x}(0) \in B$ para $t \rightarrow \infty$ a distância entre $\boldsymbol{x}(t)$ e A tende a zero. O maior conjunto com esta característica define a *Bacía de Atração* de A.
- A é mínimo, ou seja, não existe $A_0 \subset A$ tal que satisfaça as duas condições anteriores e $A_0 \neq A$.

Um atrator pode ser um **único ponto estável** no espaço de fase. Pode ser ainda um **Ciclo-limite**, que é um conjunto de pontos que define uma "órbita"em torno de um ponto de equilíbrio instável. Para espaços de 3 ou mais dimensões, há ainda a **Superfície toroidal**, que é uma superfície bidimensional em forma de tóro e possui duas frequências que definem regimes periódicos ou quasi-periódicos, e, por fim, o **Atrator estranho**, que flutua entre vários estados de forma nem aleatória, nem fixa, nem periódica, mas com um comportamento coninuo e caótico, ele apresenta dependências sensíveis às condições iniciais.

Dimensão

A dimensão é uma extensão mensurável que determina a porção de espaço ocupada por "algo". Pode-se definir, por exemplo, um espaço que possua duas dimensões, como o $\mathbb{R}^2$. Para se pensar em quantidade de "volume"que ele possa ocupar, há de se definir uma quantidade de "volume"que ele possa não ocupar, assim, toma-se então o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ como um subespaço do $\mathbb{R}^3$, em que ele ocupa 2 dimensões das 3 possíveis. Uma analogia direta é determinar-se um plano dentro de um cubo. Tomando-se como base a álgebra, é direto notar que, pelo fato de $\{\mathbb{R}\}$ ter cardinalidade infinita, o $\mathbb{R}^3$ tem infinitas vezes mais "informação"que o seu respectivo subgrupo. Na analogia, pode-se ocupar o cubo com infinitos planos. Continuando a perspectiva, faz-se notar então que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$.

A dimensão de um conjunto de pontos também pode ser vista como o número de coordenadas necessária para definir a posição desses pontos no conjunto, por exemplo, para determinar-se um ponto em uma linha, basta que se tenha uma coordenada, e assim qualquer ponto da linha poderá ser localizado através do comprimento de arco medido a partir de algum ponto fixo de referência desta linha.

Fractais

Para conjuntos fractais, a dimensão continua a caracterizar a quantidade de informação que se tem em um espaço, entretanto, esta agora não se limita aos números inteiros.

Fractais são objetos que apresentam semelhanças em escala (auto-semelhantes), de forma que não importa o quanto se refine a precisão, a quantidade de informação disponível é sempre equivalente. Existem assim três tipos de fractais:

- Autossemelhantes: são fractais que se repetem exatamente da mesma maneira conforme se refina a escala de observação.
- Quasi-Autossemelhante: como o próprio nome sugere, são fractais que aproximam-se de repetir as suas formas em diferentes escalas, mas acabam por repetir suas imagens originais um pouco distorcidas ou degeneradas.

- Autossemelhantes Estatísticos: estes fractais por sua vez não reproduzem a mesma forma em diferentes escalas, a não ser ao considerar-se uma distribuição estatística de sua forma, como picos, vales, quantidade de informação, e características mais marcantes que se formem, mas não apresentam níveis de "igualdade"em relação às formas de outras escalas.

A dimensão para um conjunto fractal representa o quanto do espaço este conjunto ocupa, como não se limita a números inteiros, pode-se ter uma aproximação deste em relação ao espaço de dimensões inteiras. Por exemplo, tome um fractal com dimensão de aproximadamente 1.1, este conjunto tem o comportamento muito próximo ao de uma linha, já para dimensões próximas a 1.9, esta linha se contorce, estica e dobra, de forma a se aproximar muito de uma superfície bidimensional.

Um exemplo de objeto fractal é a curva de Koch, que se monta a partir de um triângulo equilátero de lado arbitrário 1. Retira-se o terço médio de cada linha e adiciona-se no lugar um triângulo equilátero de lado $\frac{1}{3}$. Em seguida, faz-se o mesmo para as 12 linhas dos 6 triângulos formados, adicionando-se triângulos equiláteros de lado $\frac{1}{9}$, e assim sussessivamente *ad infinitum.* 1

O perímetro deste objeto é, na primeira iteração um triângulo de 3 lados $P_1 = 3$, na segunda, para cada lateral surgem mais duas laterais de triângulos de tamanho 1/3, logo uma linha originalmente de tamanho 1, possui agora tamanho 4/3, multiplicada pelos 3 lados do triângulo $P_2 = 3.\frac{4}{3}$. Para a terceira iteração, novamente uma linha de tamanho 1/3 tem seu terço médio retirado (de tamanho 1/9) e substituido por duas retas de tamanho semelhante, passando a

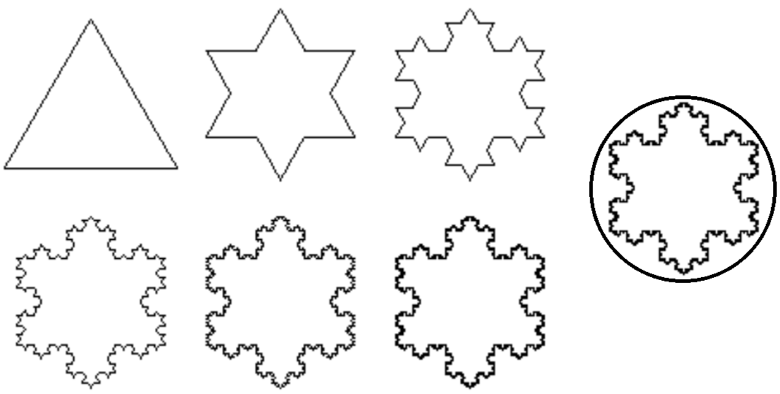

Figura 2: *6 iterações do Floco de Neve de Koch a partir de um triângulo equilátero. À direita, uma representação da n-ésima iteração (6^a) com área limitada por um círculo.*

valer 4/9, como cada linha é transformada em 4 novas linhas, o número de linhas a se substituir passa a ser 4 vezes o número anterior, logo $P_3 = 3.4.\frac{1}{9} = 4/3$, $P_4 = 4.4/9 \Rightarrow P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$.

Pode-se então visualizar o "Floco de Neve de Koch"na *Figura 2*, onde torna-se claro que independente do número de iterações que se fizer, a área do objeto nunca será maior que a de um círculo de raio 1. Por outro lado, do cálculo acima, seu perímetro aumenta em cada iteração, tal que para $n \to \infty \Rightarrow P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} \to \infty$. Desta forma, poderia-se supor que o objeto tenha algum tipo de comportamento fractal, uma vez que tem mais informação do que uma dimensão poderia comportar e menos do que duas. Isso se provará mais a diante.

Box Counting (Contador de Caixas)

O método de "contar caixas", baseia-se numa ideia de medida em relação ao conteúdo. É como relacionar o tamanho da régua em relação à quantidade de objetos medidos.

Por exemplo, possui-se uma linha de tamanho um, ao medí-la, usa-se uma régua de mesmo tamanho (escala $\epsilon = 1$), o número de réguas usadas para medir a linha é $N = 1$. Ao tentar-se medir a mesma linha com uma régua de metade do tamanho da linha ($\epsilon = 1/2$), são 2 réguas necessárias para a medida, logo encontra-se uma relação direta entre número de objetos e escala de medição ($N = N(\epsilon)$). O mesmo exercício pode ser feito para um quadrado de lado 1 de duas dimensões, o que se tem agora é um quadrado padrão que se usa para comparar, em primeira estância este quadrado padrão mede também 1 ($\epsilon = 1$), logo, um único quadrado bastará para cubrir todo o objeeto ($N(\epsilon) = 1$). Ao diminuir-se pela metade o tamanho do quadrado-guia ($\epsilon = 1/2$), tem-se agora que para que ele possa cubrir todo o objeto, são necessários 4 quadrados, 2 vezes mais objetos que o caso da linha, percebe-se assim que o número de objetos também depende da dimensão que ele possui ($N = N(\epsilon, D)$). Não é difícil perceber que para um cubo, terá-se 8 cubos-guia, ou seja, 4 vezes mais objetos de comparação que o caso da linha.

Pode-se estabelecer uma relação de potência do aumento do número de objetos em relação à dimensão. Mais ainda, o número de objetos é ainda definido pelo tamanho da escala de medida, e assim, obtém-se:

$$N \propto \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^D = \epsilon^{-D} \tag{2}$$

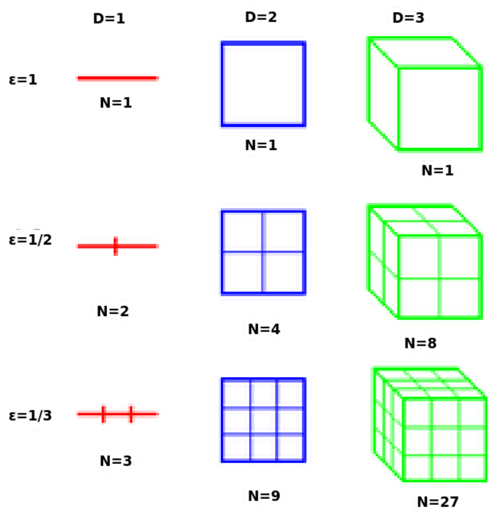

Figura 3: *Representação da relação entre o número de caixas, a medida utilizada (lado ϵ da caixa) e o número de dimensões do objeto.*

Na *Firgura 3* pode-se acompanhar o desenvolvimento da medição dos objetos em relação à dimensão e a escala utilizada, onde se tem uma linha em dimensão 1, um quadrado em dimensão 2 e um cubo em dimensão 3.

A mesma regra pode ser utilizada para as dimensões fractais de forma um pouco menos intuitiva. Reorganizando a equação obtém-se então:

$$D \propto \frac{log(N)}{log(1/\epsilon)} \tag{3}$$

O que se observa é que a dimensão é dada então pela relação entre um termo de *Quantidade de Informação* (ou *Capacidade*) e um termo de *Escala*. Na prática, lida-se com sistemas muito complexos que não são "montados"matematicamente, assim, a relação de dimensão se torna exata quando são computados todos os N's para as diferentes escalas, ou seja, da *Equação 3* toma-se o limite para a escala tendendo a zero e obtém-se a igualdade:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{log(N(\epsilon))}{log(1/\epsilon)} \tag{4}$$

Pode-se então aplicar a *Equação 4* ao conjunto do Floco de Neve de Koch e verificar sua dimensionalidade. Assim, circundando-se seu perímetro com elementos de reta (em torno das arestas dos "triângulos"), tem-se que para cada iteração, 1 segmento de reta se torna 4 ($N = 1 \to N = 4$), e seu tamanho passa de 1 para 1/3 ($\epsilon = 1 \to \epsilon = 1/3$), assim, na n-ésima iteração, terá-se $N = 4^n$ e $\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Aplicando-se a *Equação 4*:

$$D_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{log(4^n)}{log(3^n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n.log(4)}{n.log(3)} = \frac{log(4)}{log(3)} \Rightarrow D_0 \approx 1.26186 \tag{5}$$

Que é maior que 1 e menor que 2, como se esperava.

Fractais e Caos

O primeiro cientista a cunhar o termo fractal foi Benoit Mendelbrot, um matemático francês, por volta de 1975. Mendelbrot trabalhava na IBM, e ao analisar sequências de erros nas linhas de transmissões, percebeu que os erros não possuíam um período bem definido. Mais que isso, percebeu que os erros repetiam exatamente os mesmos padrões para escalas diferentes. Os engenheiros da época não possuíam grandes ferramentas para compreender a estrutura dos erros das trasmissões, mas os matemáticos sim. O que Mendelbrot estava observando era uma manifestação de um conjunto matemático abstrato chamado o conjunto de Cantor.

O conjunto de Cantor é parecido com o Floco de Koch, mas, baseia-se na subtração de elementos, não na adição. Toma-se uma linha de tamanho arbitrário 1 e retira-se seu terço médio, dos dois intervalos restantes de tamanho 1/3 executa-se o mesmo procedimento, deixando-se 4 intervalos de tamanho 1/9. Assim, repete-se o processo até o infinito. Percebe-se que independente da escala, terá-se a mesma forma, logo, é um conjunto autossimilar (fractal). Além disso, pela Teoria da Medida, é fácil aceitar que o conjunto de pontos restantes tenha medida zero, no sentido de Lebesgue; e que pelo teorema dos intervalos encaixantes, seja um conjunto de cardinalidade infinita, uma vez que associando-se 0 ou 1 para um intervalo respectivamente à esquerda ou à direita do centro médio de cada iteração, pode-se localizar um ponto do conjunto de cantor com uma sequência infinita do tipo 10101100010...

Até então, não se possuía uma representação de tal fenômeno na natureza. O que causou maior espanto nos cientístas da época foi ver que fractais poderíam ser gerados pelos atratores de sistemas dinâmicos, assim como pelas bacías de atração de alguns sistemas, nos espaços de fase. De fato, a relação entre a dimensão dos atratores e o comportamento caótico do sistema é dada de forma direta. Se um sistema que evolui continuamente no tempo possui dimensão inteira, sabe-se que seu comportamento será não-caótico e "suave", já para um sistema de dimensão fracionada, seu comportamento será caótico e imprevisível. O atrator de um sistema caótico é denominado, assim, *Atrator Estranho.*

Figura 4: *Conjunto de Cantor.*

Qual a importância de se medir a dimensão de um atrator caótico? A resposta é encontrada no sentido da análise de um sistema dinâmico. Como os sistemas caóticos, geradores de fractais, são oriundos de problemas físicos reais, o que se busca é uma compreensão da quantidade de parâmetros necessários para se poder definir o sistema por completo.

O que se têm é que um sistêma dinâmico real é uma representação de $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, mas quão grande deve ser a dimensionalidade de $\boldsymbol{x}$? Por exemplo, no experimento de Guckenheimer e Buzyna (1983) sobre o atrator caótico na rotação diferencial de um flúido aquecido, usaram-se 27 termistores para medir a temperatura em diferentes pontos do fluido. O número 27 foi tomado de forma arbitrária para que fosse suficientemente grande, onde se havia a ideia de que a leitura de temperatura do fluído seria uma variável de estado do sistema. Com estes dados se poderia definir um atrator, calcular-se a dimensão e por fim determinar o número de parâmetros.

Os algoritmos numéricos utilizados para fazer o cálculo da Dimensão de Capacidade (D_0) de atratores estranhos são chamados de algoritmos de contagem de caixas e são elaborados do seguinte modo:

- itera-se numericamente "muitas"vezes o sistema, despreza-se seu comportamento transiente e marca-se no espaço de fase os pontos fixos;
- cria-se um *grid* no espaço de fase, divide-se a região em $N(\epsilon)$ "caixas"de aresta ϵ;
- refina-se o *grid* (diminui ϵ e aumenta N) e refaz-se o mesmo procedimento;
- a Dimensão de Capacidade D_0 é dada então pela inclinação média de $log(N(\epsilon))$ por $log(1/\epsilon)$, uma vez que a dimensão é equivalente a variação do primeiro termo em relação ao segundo.

O problema da Dimensão de Capacidade é que para problemas reais ela apresenta uma convergência muito lenta, o que a torna muito difícil de calcular. Visto que a técnica de contar caixas toma uma proporção do espaço como um todo e depois o subdivide, há muitas caixas não visitadas pelo atrator que ainda são consideradas a cada subdivisão. Define-se então um novo tipo de dimensão, baseada no número de vezes que a orbita do sistema cruza determinado cubo.

Generalização do Cálculo de Dimensões

A forma de se generalizar o cálculo de dimensões baseia-se em atribuir um peso às diferentes caixas, de forma a aumentar a importância das caixas mais "vizitadas"pelo atrator. Assim, define-se uma frequência μ_i para cada caixa N_i do espaço, onde eta frequência é determianda pela forma:

$$\mu_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} \simeq \lim_{T\to\infty} \frac{\eta(N_i, \boldsymbol{X}_0, T)}{T} \tag{6}$$

em que $\eta(N_i, \boldsymbol{x}_0, T)$ é o tempo que a órbita originada de $\boldsymbol{x}_0$ fica na caixa N_i, no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$. A "frequência"definida, também é chamada de *Medida Natural* de uma caixa N_i.

O método de contar caixas aproxima uma quantidade de caixas que possam cobrir o atrator, mas no caso de um atrator caótico, é comum que a órbita por ele executada povoe muito mais algumas regiões específicas do espaço de fase do que outras. Para tomar em relação a diferença nas medidas naturais das caixas, é possível introduzir outra definição de dimensão, que generalize o algoritmo de contar caixas. Foi proposta então por Grassberger (1983) e Hentschel e Procaccia (1983) um cálculo que leve em consideração um índice contínuo q, assim:

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log I(q,\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \tag{7}$$

onde

$$I(q,\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^q \tag{8}$$

tal que o índice da dimensão regra o peso das frequências na potência. Como as frequências são um artifício para que se diminua o número de caixas, é de se imaginar que $D_0 > D_1 > D_2 > \cdots$. Como os resultados continuam sendo dimensões, deve-se imaginar que este valor convirja para um q grande, mas em ordem pratica, geralmente se utilizam as dimensões para $q = 1$ ou $q = 2$.

Tomando-se $q = 0$, obtém-se $I(0,\epsilon) = N(\epsilon)$, substituindo-se na *Eq. 7*:

$$D_0 = \frac{1}{1-0} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \tag{9}$$

e recupera-se a *Equação 4* da Dimensão de Capacidade.

Tomando-se agora $q \to 1$ e o caso especial em que todos os μ_i sejam iguais, obtem-se do primeiro termo da *Eq. 6* que e *8*:

$$D_1 = \lim_{q\to 1} D_q = \lim_{q\to 1}\left(\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{1-q} \frac{\log I(q,\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\left(\lim_{q\to 1} \frac{(1/I(q,\epsilon))I'(q,\epsilon)}{-\log(1/\epsilon)}\right) \tag{10}$$

em que para o termo numerador tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial q} I(q,\epsilon) = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^q = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \frac{\partial \mu_i^q}{\partial q} = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^q \log \mu_i \tag{11}$$

por alguma razão não especificada nos meteriais de auxílio (e não encontrada na literatura), o termo $\log I(q,\epsilon)$ é substituído por $I(q,\epsilon)$ para valores de $q > 0$ na *Eq. 7*, assim omite-se o termo $1/I(q,\epsilon)$ da *Eq. 10*, unindo-a com a *Eq. 11*, para $q \to 1$, tem-se:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i \log \mu_i}{\log \epsilon} \tag{12}$$

E D_1 é definida então como a *Dimensão de Informação*, onde nota-se o numerador como o termo da *Entropia de Shanon*.

E para o caso em que $q = 2$, novamente substitui-se $\log I(q,\epsilon)$ por simplesmente $I(q,\epsilon)$ e resolve-se a *Eq. 7*, agora sem a necessidade da aplicação de L'Hospital:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{1-2} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^2}{\log(1/\epsilon)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^2}{\log \epsilon} \tag{13}$$

Desta forma definida, a dimensão D_2 é chamada então de *Dimensão de Correlação.*

É importante notar que para um atrator homogêneo, $D_0 = D_1$, pois a frequência será aproximadamente a mesma $\mu_i = 1/N(\epsilon)$ e da *Eq. 12* retoma-se a formula para a Dimensão de Capacidade.

O termo de frequência ao quadrado, da *Eq. 13*, indica a frequência relativa com que dois pontos caem na i-ésima caixa de um espaço subdividido. O que Grassberg e Procaccia sugeriram, foi aproximar-se este valor pela frequência relativa com que dois pontos estão separados por uma distânncia menor ou igual a ϵ. Ou seja, a fração de pontos $q(\epsilon)$ do atrator que está dentro de uma bola centrada em $\boldsymbol{x}_i$ de raio ϵ, $[q(\epsilon) = \{\boldsymbol{x}_j \ ; \boldsymbol{x}_j \in B(\boldsymbol{x}_i, \epsilon)\}]$. Esta fração é dada pela relação:

$$q(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} H(\epsilon - ||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j||) \tag{14}$$

Sendo N o número de pontos no atrator e H a função de Heaviside, que é definida como $H(x) = 0$ para $x < 0$ e $H(x) = 1$ para $x > 0$. Define-se a *Função de Correlação* $C(\epsilon)$ como o valor médio de $q(\epsilon)$, calculado sobre todos os pontos $\boldsymbol{x}_j$. No cálculo real, o número de pontos de um atrator caótico é muito grande, toma-se então N' pontos aleatórios, onde $N' < N$, e determina-se o número de pontos contidos na hiper-esfera:

$$C(\epsilon) \approx \frac{1}{N'} \sum_{j=1(j \neq i)}^{N'} q(\epsilon) \tag{15}$$

O valor de C será proporcional a ϵ se os pontos estverem distribuídos em uma linha de atração; será proporcioanl a ϵ^2 se os pontos estiverem uniformemente espalhados sobre um plano de atração. Para uma estrutura fractal de atração, Grassberg e Procaccia definiram que $C \propto \epsilon^{D_2}$, ou seja:

$$D_2 \approx \lim_{N \to \infty} \left(\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon} \right) \tag{16}$$

E assim calcula-se o valor de D_2 para vários valores de ϵ e aproxima-se o valor a partir da inclinação da reta no gráfico log x log. É importante notar-se que D_2 é mais fácil de se calcular que D_0, mas ainda faz-se importante para determinar algumas características do sistema saber o valor da *Dimensã de Capacidade*, D_2 se torna então um limite inferior para D_0.

Conclusão

Com os conceitos desenvolvidos pode-se então definir um objeto fractal e vinculá-lo ao comportamento caótico em sistemas dinâmicos.

Numerosos fenômenos do mundo real evidenciam propriedades fractais e dimensões fracionadas analisados a partir de dados medidos e utilização de computação baseada em técnicas de análise fractal. Na prática, mensurações da dimensão fractal são afetadas por diversas imperfeições da metodologia e são extremamente sensíveis a ”ruídos”, limitações em cálculos numéricos e experimentais pela grande quantidade de dados. No entanto, o campo o estudo destes sistemas pode ter muitas aplicações práticas, englobando diagnóstico por imagem, fisiologia, neurociência, medicina, física, análise, acústica, processos eletroquímicos, entre outros.

Referências

- `https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal#Categorias_de_fractais`
- Dimensão Fractal, R. F. Nunes e R. M. Bizarro. USP.
- Fractal Concepts in Surface Growth, A. L. Barabási e H. E. Stanley.

- Chaos in Dynamical System, Edward Ott. Ed. CAMBRIDGE, 2nd Edition.
- Sistemas Dinâmicos, Luiz Henrique Alvez Monteiro. LIVRARIA DA FÍSICA, 2002.
- CAOS - A criação de uma nova ciência.Gleick, James. CAMPUS, 13ª Edição.

Apêndice

Cálculo da Dimensão Fractal para o Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor é uma linha de tamanho arbitrário 1 em que se retira seu terço médio a cada nova iteração, (*Figura 5*).

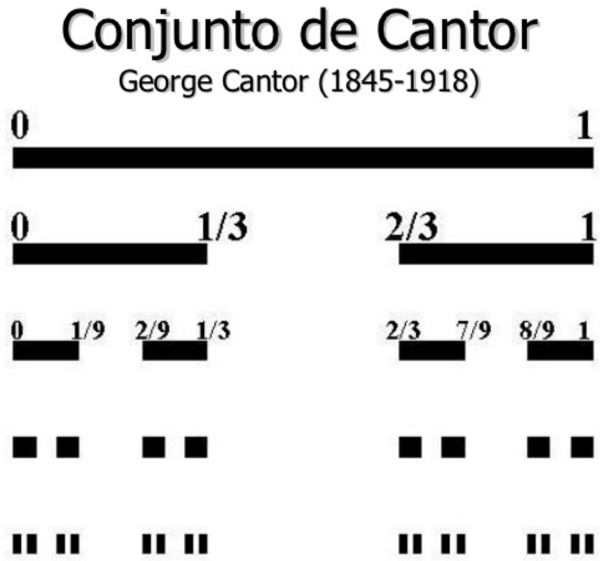

Figura 5: *Conjunto de Cantor.*

Para a primeira iteração, tem-se $N = 1$ e $\epsilon = 1$; para a segunda: $N = 2$ e $\epsilon = 1/3$... em cada iteração cada segmento de reta vira dois e diminui-se seu tamanho em 1/3. Logo, na n-ésima iteração: $N = 2^n$ e $\epsilon = 1/3^n$, assim:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n.\log 2}{n.\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \to D_0 = 0.63093 \tag{17}$$