List of Figures

Cálculo de momento de inercia de un cilindro solido y una esfera hueca

Ingrid Díaz

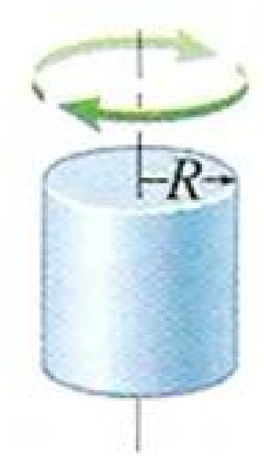
March 2015

1 Momento de inercia de un cilindro sólido

Un cilindro sólido uniforme tiene un radio R, masa M y longitud L. Calcule su momento de inercia en torno a su eje central.

Para simular esta situacion, imagine que hace girar una lata de jugo congelado en torno a su eje central.

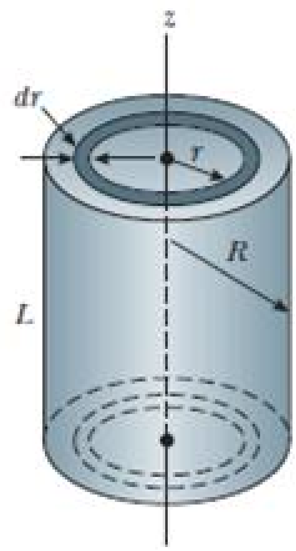
Figure 1: Ejemplo de un cilindro rotando



Este ejemplo es un problema de sustitución, con el uso de la definición de momento de inercia. Se debe reducir el integrando a una sola variable. Es conveniente dividir el cilindro en muchos cascarones cilindricos, cada uno con radio r, grosor dr y longitud L, como se muestra en la figura. La densidad del cilindro es ρ.

El volumen dV de cada cascaron es su area de seccion transversal multiplicada por su longitud: $dV = LdA = L(2\pi r)dr$.

Figure 2: Cálculo de I en torno al eje z para un cilindro sólido uniforme.



Expresamos dm en términos de dr :

$$dm = \rho dV = 2\pi\rho L r dr \tag{1}$$

Luego, sustituyendolo en la ecuación del momento de inercia:

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \left(2\pi\rho L r dr\right) = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4 \tag{2}$$

Usamos el volumen total πR^2L del cilindro para expresar su densidad:
$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$
Sustituya este valor en la expresión para I_z:

$$I_z = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right) L R^4 = \frac{1}{2} M R^2 \tag{3}$$

El resultado para el momento de inercia de un cilindro no depende de L, la longitud del cilindro. Se aplica igualmente bien a un largo cilindro y a un disco plano que tengan los mismos masa M y radio R.

2 Momento de inercia de una Esfera

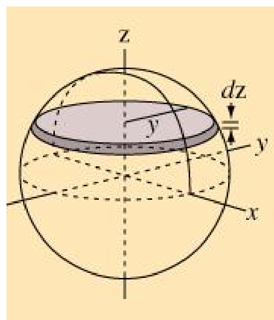
La expresion para el momento de inercia de una esfera puede hacerse asumiendo los momentos de discos delgados infinitesimales que giran sobre el eje z. El momento de inercia de uno de esos discos es (como vimos en el ejemplo anterior):

Considerando momentos de inercia de elementos de discos de grosor infinitesimales: $dI = \frac{1}{2}y^2 dm$ expresando la masa dm en terminos de la densidad ρ y el volumen $dm = \rho\, dV$

Sustituyendo dV en términos del area πy^2 y la altura dz del disco $dV = \pi y^2 dz$

Encontrando a y en términos de la variable de integración z: $y^2 = R^2 - z^2$.

Figure 3: Integral de la esfera sólida de radio R, masa M y densidad $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$



Luego, la integral se desarrolla efectuando una integración polinómica con $\left(R^2 - z^2\right)^2 = R^4 - 2R^2z^2 + z^4$

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{R} y^4 dz = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - z^2\right)^2 dz = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 \tag{4}$$

Sustituyendo la densidad en la expresión anterior, nos queda:

$$I = \frac{8}{5}\left[\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right]\pi R^5 = \frac{2}{5}MR^2 \tag{5}$$